Seminar Bakkalaureat TM
Finanz- und Versicherungsmathematik
Digitale Netze und die Sobol-Folge

Markus Hofer
MNr.: 0431166

10.05.2006

Überblick

Überblick

1 Motivation und Einführung

Überblick

1. Motivation und Einführung
2. Diskrepanzabschätzungen für (t,m,s)-Netze und (t,s)-Folgen

Überblick

1. Motivation und Einführung
2. Diskrepanzabschätzungen für (t,m,s)-Netze und (t,s)-Folgen
3. Konstruktion und Implementation allgemein von Niederreiter-Folgen und speziell der Sobol-Folge

Motivation

Motivation

- In der Quasi-Monte Carlo Integration ist es wichtig Folgen mit niedriger Diskrepanz zu verwenden.

Motivation

- In der Quasi-Monte Carlo Integration ist es wichtig Folgen mit niedriger Diskrepanz zu verwenden.
- Halton-Folge genügt nicht allen Anforderungen

Motivation

- In der Quasi-Monte Carlo Integration ist es wichtig Folgen mit niedriger Diskrepanz zu verwenden.
- Halton-Folge genügt nicht allen Anforderungen
- $$ND_N^*(S) \leq A_s(log(N))^s + O((log(N))^{s-1})$$

  für alle $N \geq 2$, mit $A_s(b_1, .., b_s) = \prod_{i=1}^{s} \frac{b_i - 1}{2 log(b_i)}$

Motivation

- In der Quasi-Monte Carlo Integration ist es wichtig Folgen mit niedriger Diskrepanz zu verwenden.
- Halton-Folge genügt nicht allen Anforderungen
- $$ND_N^*(S) \leq A_s(log(N))^s + O((log(N))^{s-1})$$
  für alle $N \geq 2$, mit $A_s(b_1,..,b_s) = \prod_{i=1}^{s} \frac{b_i - 1}{2log(b_i)}$
- A_s ist ein großes Problem für große Dimensionen s

- **Definition:** $E = \prod_{i=1}^{s}[a_i b^{-d_i}, (a_i+1)b^{-d_i})$ mit $a_i, d_i \in Z, d_i \geq 0, 0 \leq a_i < b^{d_i}$ für $1 \leq i \leq s$ wird als elementares Intervall E in Basis b bezeichnet.

Einführung in (t,m,s)-Netze und (t,s)-Folgen

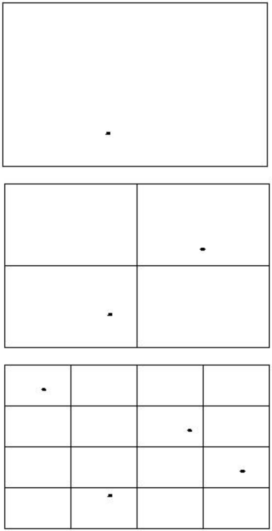
- **Definition:** $E = \prod_{i=1}^{s}[a_i b^{-d_i}, (a_i + 1)b^{-d_i})$ mit $a_i, d_i \in Z, d_i \geq 0, 0 \leq a_i < b^{d_i}$ für $1 \leq i \leq s$ wird als elementares Intervall E in Basis b bezeichnet.
- **Definition:** Seien $0 \leq t \leq m$ ganze Zahlen. Dann ist ein (t,m,s)-Netz in Basis b, eine Menge von Punkten P, mit $|P| = b^m$, in I^s für die gilt: A(E;P)$= b^t$ für jedes elementare Intervall E mit $\lambda_s(E) = b^{t-m}$.

Einführung in (t,m,s)-Netze und (t,s)-Folgen

- **Definition:** $E = \prod_{i=1}^{s} [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i})$ mit $a_i, d_i \in Z, d_i \geq 0, 0 \leq a_i < b^{d_i}$ für $1 \leq i \leq s$ wird als elementares Intervall E in Basis b bezeichnet.
- **Definition:** Seien $0 \leq t \leq m$ ganze Zahlen. Dann ist ein (t,m,s)-Netz in Basis b, eine Menge von Punkten P, mit $|P| = b^m$, in I^s für die gilt: A(E;P)= b^t für jedes elementare Intervall E mit $\lambda_s(E) = b^{t-m}$.
- **Definition:** Sei $t \geq 0$ eine ganze Zahl. Eine Folge $x_0, x_1, ...$ von Punkte in I^s ist eine (t,s)-Folge in Basis b, wenn für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$ und $m > t$, die Punktmenge bestehend aus den x_n mit $k * b^m \leq n < (k+1) * b^m$ ein (t,m,s) - Netz ist.

Beispiele

Seminar/netze.JPG



Bemerkungen

Bemerkungen

- Die Van der Corput-Folge in Basis b ist also eine (0,1)-Folge in Basis b.

Bemerkungen

- Die Van der Corput-Folge in Basis b ist also eine (0,1)-Folge in Basis b.
- Sobol-Folgen sind auch (t,s)-Folgen

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- $$ND_N^*(P) \leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i$$

  für eine Basis $b \geq 3$.

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- $$ND_N^*(P) \leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i$$
  für eine Basis $b \geq 3$.
- $$ND_N^*(P) \leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i +$$
  $$(\frac{b}{2} - 1)b^t \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i+1}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i$$
  für eine beliebige Basis b.

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für kleinere Dimensionen können bessere Resultate erzielt werden:

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für kleinere Dimensionen können bessere Resultate erzielt werden:
- Für $s = 2$, gilt für die Stern Diskrepanz eines (t,m,s)-Netzes P in Basis b

$$ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \frac{b-1}{2}(m-t) + \frac{3}{2} \right\rfloor b^t.$$

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für kleinere Dimensionen können bessere Resultate erzielt werden:
- Für $s = 2$, gilt für die Stern Diskrepanz eines (t,m,s)-Netzes P in Basis b

$$ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \frac{b-1}{2}(m-t) + \frac{3}{2} \right\rfloor b^t.$$

- Für $s = 3$ und ein (t,m,s)-Netz P gilt die Abschätzung

$$ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 (m-t)^2 + \frac{b-1}{2}(m-t) + \frac{9}{4} \right\rfloor b^t.$$

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für $s = 4$ und ein (t,m,s)-Netz P gilt die Abschätzung

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für $s = 4$ und ein (t,m,s)-Netz P gilt die Abschätzung
- $ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \left(\frac{b-1}{2}\right)^3 (m-t)^3 + \frac{3}{8}(b-1)^2(m-t)^2 + \frac{3}{8}(b-1)(m-t) + \frac{15}{4} \right\rfloor b^t.$

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für ein (t,m,s)-Netz P in Basis b mit $m > 0$ gilt folgende Abschätzung

$$ND_N^*(P) \leq B(s,b)b^t(log(N))^{s-1} + O(b^t(log(N))^{s-2}),$$

wobei hier für s = 2 oder b = 2 und s = 3,4 gilt

$$B(s,b) = \left(\frac{b-1}{2log(b)}\right)^{s-1}$$

sonst gilt

$$B(s,b) = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lfloor b/2 \rfloor}{log(b)}\right)^{s-1}.$$

Abschätzungen für (t,m,s)-Netze

- Für ein (t,m,s)-Netz P in Basis b mit $m > 0$ gilt folgende Abschätzung

$$ND_N^*(P) \leq B(s,b)b^t(log(N))^{s-1} + O(b^t(log(N))^{s-2}),$$

wobei hier für s = 2 oder b = 2 und s = 3,4 gilt

$$B(s,b) = \left(\frac{b-1}{2log(b)}\right)^{s-1}$$

sonst gilt

$$B(s,b) = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lfloor b/2 \rfloor}{log(b)}\right)^{s-1}.$$

- Betrachten wir nun die Diskrepanzabschätzung für eine Hammersley Punktmenge ist:

$$ND_N^*(P) \leq A_{s-1}(log(N))^{s-1} + O((log(N))^{s-2})$$

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

- **Lemma:** Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t,s)-Folge in Basis b gilt,

$$ND_N^*(S) \leq \frac{b-1}{2}\sum_{m=t}^{k}\Delta_b(t,m,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s) +$$

$$\frac{1}{2}max(b^t, \Delta_b(t,r,s))$$

, für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl ist, mit $b^k \leq N$ und b^r die größte Potenz von b ist welche N teilt, und wir setzen $\Delta_b(t,r,s) = 0$, wenn $r < t$.

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

- Für die ersten N Glieder einer (t,s)-Folge S in Basis $b \geq 3$ gilt:

$$ND_N^*(S) \leq \frac{b-1}{2} b^t \sum_{i=1}^{s} \binom{s-1}{i-1} \binom{k+1-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^{i-1}$$

$$+\frac{1}{2} b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \left(\binom{k+1-t}{i} + \binom{k-t}{i} \right) \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^{i}$$

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

- Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t,s)-Folge S in einer beliebigen Basis b gilt

$$ND_N^*(S) \leq (b-1)b^{t-1}\sum_{i=1}^{s}\binom{k+1-t}{i}\left(\frac{b}{2}\right)^i + \binom{b-1}{2}b^{t-1}$$

$$\sum_{i=1}^{s-1}\binom{k+i+1-t}{i}\left(\frac{b}{2}\right)^i + \frac{1}{2}b^t\sum_{i=0}^{s-1}\left(\binom{k+1-t}{i}+\binom{k-t}{i}\right)$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^i + \frac{b-2}{4}b^t\sum_{i=0}^{s-2}\left(\binom{k+i+2-t}{i}+\binom{k+i+1-t}{i}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^i$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

- Sei $s = 3$, dann gilt für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Gleider einer (t,s)-Folge S in Basis b

$$ND_N^*(S) \leq \frac{1}{24}(b-1)^3 b^t (k-t)^3 + \frac{1}{16}(b-1)^2(b+5)b^t(k-t)^2$$

$$+\frac{1}{48}(b-1)(b^2+16b+61)b^t(k-t) + \frac{1}{8}(b^2+4b+13)b^t$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

Abschätzungen für (t,s)-Folgen

- Für die ersten N Glieder einer (t,s)-Folge S in Basis b gilt

$$ND_N^*(S) \leq C(s,b)b^t(log(N))^s + O(b^t(log(N))^{s-1})$$

für $N \geq 2$, wobei für s = 2 oder b = 2 und s = 3,4 gilt

$$C(s,b) = \frac{1}{s}\left(\frac{b-1}{2log(b)}\right)^s$$

sonst gilt

$$C(s,b) = \frac{1}{s!}\frac{b-1}{2\lfloor b/2\rfloor}\left(\frac{\lfloor b/2\rfloor}{log(b)}\right)^s.$$

Konstruktion der Sobol-Folge

Konstruktion der Sobol-Folge

- Sobol-Folge ist (t,s)-Folge

Konstruktion der Sobol-Folge

- Sobol-Folge ist (t,s)-Folge
- außerdem eine spezielle Niederreiter - Folge

Konstruktion der Sobol-Folge

- Sobol-Folge ist (t,s)-Folge
- außerdem eine spezielle Niederreiter - Folge
- dafür gibt es eine Konstruktion...

Niederreiters Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen:

Konstruktion der Sobol-Folge

Niederreiters Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen:

- einen kommutativen Ring mit 1 R und mit $Kard(R) = b$;

Konstruktion der Sobol-Folge

Niederreiters Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen:

- einen kommutativen Ring mit 1 R und mit $Kard(R) = b$;
- $B = \{0, 1, .., b-1\}$, $b \geq 2$ und $s \geq 1$

Konstruktion der Sobol-Folge

Niederreiters Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen:

- einen kommutativen Ring mit 1 R und mit $Kard(R) = b$;
- $B = \{0, 1, .., b-1\}$, $b \geq 2$ und $s \geq 1$
- Bijektionen $\psi_r : B \rightarrow R$ für $r = 1, 2, ..$ mit $\psi_r(0) = 0$ für alle ausreichend hohen r;

Konstruktion der Sobol-Folge

Niederreiters Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen:

- einen kommutativen Ring mit 1 R und mit $Kard(R) = b$;
- $B = \{0, 1, .., b-1\}$, $b \geq 2$ und $s \geq 1$
- Bijektionen $\psi_r : B \to R$ für $r = 1, 2, ..$ mit $\psi_r(0) = 0$ für alle ausreichend hohen r;
- Bijektionen $\lambda_{ij} : R \to B$ für $1 \leq i \leq s$ und $j = 1, 2, ..$ mit $\lambda_{ij}(0) = 0$ für $1 \leq i \leq s$ und alle ausreichend hohen j;

Konstruktion der Sobol-Folge

Niederreiters Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen:

- einen kommutativen Ring mit 1 R und mit $Kard(R) = b$;
- $B = \{0, 1, .., b - 1\}$, $b \geq 2$ und $s \geq 1$
- Bijektionen $\psi_r : B \to R$ für $r = 1, 2, ..$ mit $\psi_r(0) = 0$ für alle ausreichend hohen r;
- Bijektionen $\lambda_{ij} : R \to B$ für $1 \leq i \leq s$ und $j = 1, 2, ..$ mit $\lambda_{ij}(0) = 0$ für $1 \leq i \leq s$ und alle ausreichend hohen j;
- Elemente $c_{jr}^{(i)} \in R$ für $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j$, und $1 \leq r$.

Konstruktion der Sobol-Folge

Konstruktion der Sobol-Folge

- **Definition:** Für $1 \leq i \leq k$ und $0 \leq n$, definieren wir die i-te Koordinate des Punktes P_n als

$$P_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} x_{nj}^{(i)} b^{-j},$$

wobei

$$x_{nj}^{(i)} = \lambda_{ij} \left(\sum_{r=1}^{\infty} c_{jr}^{(i)} \psi_r(a_r(n)) \right),$$

für $1 \leq j$. Mit $n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(n) b^{r-1}$ ist die Ziffernentwicklung von n zur Basis b.

Konstruktion der Sobol-Folge

- **Satz 4.1:** Sei b eine Primzahl und sei $R = GF(b)$. Wenn für eine ganze Zahl $t \geq 0$

$$t \geq l - \rho(C; l)$$

für jede ganze Zahl $l > t$, ist die Folge die in der vorigen Definition gegeben ist eine (t,s)-Folge in Basis b.

Konstruktion der Sobol-Folge

- **Satz 4.1:** Sei b eine Primzahl und sei $R = GF(b)$. Wenn für eine ganze Zahl $t \geq 0$

$$t \geq l - \rho(C; l)$$

für jede ganze Zahl $l > t$, ist die Folge die in der vorigen Definition gegeben ist eine (t,s)-Folge in Basis b.

- Sei

$$c_m^{(i)}(l) = \left(c_{m,1}^{(i)}, .., c_{m,l}^{(i)}\right) \in GF(b)^l,$$

und sei

$$C(d_1, ..d_k; l) = \{c_m^{(i)}(l) | 1 \leq m \leq d_i, 1 \leq i \leq k\}.$$

Wir definieren $\rho(C; l)$ als die maximale ganze Zahl d, sodass $C(d_1, .., d_k; l)$ linear unabhängig über GF(b) für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $d_1, .., d_k$ ist, für welche $\sum_{1 \leq i \leq k} d_i = d$.

Konstruktion der Sobol-Folge

Seien die Polynome $p_1(z), .., p_k(z) \in GF(b, z)$ paarweise relativ prim und sei $e_i = deg(p_i) \geq 1$ für $1 \leq i \leq k$. Für $m \geq 1, 1 \leq i \leq k$, und $j \geq 1$, betrachten wir die Entwicklung

$$\frac{y_{im}(z)}{p_i(z)^j} = \sum_{r=w}^{\infty} a^{(i)}(j, m, r) z^{-r},$$

durch welche die Elemente $a^{(i)}(j, m, r) \in GF(b)$ bestimmt werden. $c_{mr}^{(i)} = a^{(i)}(m_i + 1, m, r)$

Konstruktion der Sobol-Folge

Sobol Folgen sind äquivalent zu allgemeinen Niederreiter Folgen in Basis b=2, sodass alle Bijektionen λ_{ij}, ψ_r identische Abbildungen sind; $p_1(z) = z$ und für $i = 2, .., k$ ist $p_i(z)$ das (i-1)-te primitive Polynom in der Liste aller primitiven Polynome sortiert nach nichtfallenden Graden; $y_{im}(z) = y_{ih}(z)$, wobei $h = |m-1|_{e_i} + 1$ und $deg(y_{ih}) = e_i - h$.

Implementation

Implementation

- **Definition:** XOR ist ein Operator für 2 Werte modulo 2 mit folgenden Ergebnissen: 0 XOR 0 $=$ 0, 1 XOR 0 $=$ 1, 0 XOR 1 $=$ 1, 1 XOR 1 $=$ 0. Für Vektoren gilt der Operator komponentenweise.

Implementation

- **Definition:** XOR ist ein Operator für 2 Werte modulo 2 mit folgenden Ergebnissen: 0 XOR 0 = 0, 1 XOR 0 = 1, 0 XOR 1 = 1, 1 XOR 1 = 0. Für Vektoren gilt der Operator komponentenweise.
- $n = n_m 2^{m-1} + ..n_2 2 + n_1$

Implementation

- **Definition:** XOR ist ein Operator für 2 Werte modulo 2 mit folgenden Ergebnissen: 0 XOR 0 = 0, 1 XOR 0 = 1, 0 XOR 1 = 1, 1 XOR 1 = 0. Für Vektoren gilt der Operator komponentenweise.
- $n = n_m 2^{m-1} + ..n_2 2 + n_1$
- Gray code g $= (g_1, .., g_m)^t$ so dass $g_j = n_j + n_{j+1} \pmod 2$ für $j = 1, .., m$, wobei wir $n_{m+1} = 0$

Implementation

Implementation

- Antonov und Saleev zeigten, dass $Cg_n, n = 0, 1, .., 2^m - 1$, die ersten 2^m Punkte einer (t,s) - Folge erzeugt.

Implementation

- Antonov und Saleev zeigten, dass $Cg_n, n = 0, 1, .., 2^m - 1$, die ersten 2^m Punkte einer (t,s) - Folge erzeugt.
- Cg_n XOR $Cg_{n+1} = C(g_n$ XOR $g_{n+1})$

Implementation

- Antonov und Saleev zeigten, dass $Cg_n, n = 0, 1, .., 2^m - 1$, die ersten 2^m Punkte einer (t,s) - Folge erzeugt.
- Cg_n XOR $Cg_{n+1} = C(g_n$ XOR $g_{n+1})$
- $\|g_n \;\; XOR \;\; g_{n+1}\| = 1$

Das Ende

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!