DIPLOMARBEIT

Normale Zahlen

ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Drmota

durch
Christoph Aistleitner
Feichterstr. 11
4407 Dietach

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Im Deutschland des Jahres 1874 zeigte Georg Cantor, dass das Kontinuum überabzählbar ist. Seine Überlegungen wurden damals von vielen führenden Mathematikern abgelehnt, etwa von Leopold Kronecker. In Frankreich jedoch wurden sie vergleichsweise freundlich aufgenommen und beeinflussten viele wichtige Mathematiker, etwa Emile Borel und Henri Lebesgue, welche um 1900 die Grundsteine der modernen Maßtheorie legten sowie eine Neudefinition des Integralbegriffs wagten.

Aus Cantors Resultat folgt, dass sich die reellen Zahlen nicht der Reihe nach aufzählen und mitsamt ihren Eigenschaften in eine Liste eintragen lassen, auch nicht in eine unendlich lange Liste und mit beliebig Zeit. Um das Wesen reeller Zahlen zu beschreiben ist also ein Klassifikationssystem nötig, mittels dessen sich die reellen Zahlen in Klassen mit bestimmten Eigenschaften einordnen lassen, so dass dann nur noch die Natur dieser Klassen beschrieben werden muss. Die neu entstandene Maßtheorie lieferte das nötige Werkzeug für diese Herausforderung.

Natürlich stellte sich auch sofort die Frage, welche Eigenschaften "typisch" für reelle Zahlen sind, über welche Eigenschaften also "fast alle" reellen Zahlen verfügen. So lassen sich etwa die reellen Zahlen in rationale und irrationale Zahlen unterteilen, wobei erstere Maß 0 besitzen (Cantor bewies dass es nur abzählbar viele rationale Zahlen gibt, was sich leicht mittels des Cauchy'schen Diagonalverfahrens zeigen lässt; Borel bewies dass abzählbare Mengen Maß 0 besitzen), weshalb fast alle Zahlen irrational sind. Eine "typische" reelle Zahl ist also irrational.

Häufig wird die Geburtsstunde der metrischen Zahlentheorie mit dem Erscheinen Borels einflussreicher Arbeit "*Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*" [14] angegeben. Darin untersucht er die Eigenschaften "typischer" reeller Zahlen in Hinblick auf ihre Dezimalentwicklung bzw. Kettenbruchdarstellung (siehe Kapitel 8.7). In diesem Artikel gab er auch eine erste Definition für Normalität einer Zahl an (siehe Kapitel 2.1 und 2.3), und zeigte gleich, dass fast alle reelle Zahlen absolut normal sind (siehe Kapitel 3.1), ein Resultat, das sich als Spezialfall (und erstmaliges Auftreten) des später entdeckten starken Gesetzes der großen Zahlen interpretieren lässt (siehe S. Ducray [38]). Auch mittels Ergodentheorie und der Theorie dynamischer Systeme lässt sich dieses Resultat heute recht einfach sehen (siehe etwa P. Billingsley [11]). Interessanterweise ist die Menge normaler Zahlen, obwohl aus maßtheoretischem Blickwinkel sehr groß, aus topologischer Sicht relativ klein: es handelt sich dabei um eine "magere" Menge, wie in Kapitel 3.3 gezeigt wird.

Eine normale Zahl ist, vereinfacht gesagt, eine solche, in deren Nachkommastellen alle möglichen Ziffern mit gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten, und ebenso alle zweistelligen Ziffernkombinationen, also etwa "00", "01", "02" usw., alle dreistelligen Ziffernkombinationen etc. Eine zur Basis 10 (also im Dezimalsystem) normale Zahl enthält also etwa die Ziffer "0" mit einer asymptotischen relativen Häufigkeit von 10^{-1} und den Ziffernblock "25021982" mit einer asymptotischen relativen Häufigkeit von 10^{-8}, also insbesondere unendlich oft. *More dramatically*, wie G. Harmann [49] meint, ist die Vorstellung, dass in den Kommastellen einer normalen Zahl auch der genetische Code einer jeden Person (interpretiert als Ziffernblock) unendlich oft aufscheint, und ebenso der genetische Code aller Menschen, die je gelebt haben oder leben werden.

Ebenso wie das Resultat, dass alle reellen Zahlen absolut normal sind, aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht heute gewissermaßen trivial erscheint, gilt ähnliches für eine erste Diskrepanzabschätzung (siehe Kapitel 6) durch A. Khintchine [62] 1924, die sich aus heutiger Sicht als Spezialfall (und erstmaliges Auftreten) des später entdeckten Gesetzes des iterierten Logarithmus lesen lässt (siehe N.H. Bingham [12]).

Es ist relativ kompliziert, normale Zahlen explizit zu konstruieren. Da sich Normalität einer Zahl in einem gewissen Sinn auch als "Zufälligkeit" der Anordnung der Ziffern interpretieren lässt überrascht es, dass die bekannteste und erste explizit angegebene (durch D.G. Champernowne [23] 1933) normale Zahl eine besonders einfache Struktur aufweist. Es ist nämlich die sogenannte "Champernowne-Zahl"

$$0.1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ \ldots$$

normal zur Basis 10, wie in Kapitel 4.1 gezeigt wird. Eine weitere, einfach strukturierte normale Zahl ist die "Copeland-Erdös-Konstante"

$$0.2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ \ldots,$$

gebildet durch "Hintereinanderschreiben" der Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge, welche, wie Champernowne bereits vermutet hat und wie durch A.H. Copeland und P. Erdös [32] 1946 beweisen wurde, normal zur Basis 10 ist. Der Beweis dieser Behauptung ist in Kapitel 4.2 angegeben, gefolgt von einer weiteren bekannten, von H. Davenport und P. Erdös stammenden Methode zur Konstruktion normaler Zahlen

(Kapitel 4.3) sowie einem relativ aktuellen Ergebnis von Y. Nakai und I. Shiokawa (Kapitel 4.4).

Einen wichtigen und interessanten Zusammenhang zwischen Normalität von Zahlen und der Theorie der Gleichverteilung modulo 1 stellte D.D. Wall [153] in seiner Doktorarbeit 1949 her: er zeigte, dass eine relle Zahl a genau dann normal zu einer Basis β ist, wenn die Folge $a, \beta a, \beta^2 a, \beta^3 a, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 ist. Dieses Resultat wird neben anderen in Kapitel 2.4 vorgestellt; Grundlegendes zur Theorie der Gleichverteilung findet sich in Kapitel 2.2.

Fragen danach, was sich aus Normalität zu einer bestimmten Basis hinsichtlich Normalität zu anderen Basen schließen lässt, und ob Normalität einer Zahl überhaupt von der Darstellung in einer bestimmten Basis abhängt oder nicht, wurden von J.W.S. Cassels [22] und W. Schmidt [126][127] beantwortet. In Kapitel 5 werden zwei diesbezügliche Artikel von Cassels bzw. Schmidt präsentiert.

Ob Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi$ oder e absolut normal, normal zu manchen bestimmten Basen oder zu keiner einzigen Basis normal sind, ist nach wie vor nicht geklärt. In Kapitel 7 wird dieser Frage anhand (relativ) aktueller Forschungsergebnisse nachgegangen.

In Kapitel 8 schließlich werden einige von vielen möglichen Verallgemeinerungen der Normalität reeller Zahlen angegeben, und in Kapitel 9 wird kurz auf diverse Artikel und Ergebnisse hingewiesen, die aus Zeit- und Platzgründen keinen umfassenderen Eingang in vorliegende Arbeit finden konnten.

Kapitel 2

Definitionen und grundlegende Resultate

2.1 Definitionen

Bezeichne a eine beliebige reelle Zahl. Dann kann a bezüglich einer festen ganzzahligen Basis $\beta \geq 2$ in der Form

$$a = \lfloor a \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^{-n} \quad \text{mit} \quad a_n \in \{0, \ldots, \beta - 1\} \tag{2.1}$$

dargestellt werden. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man verlangt, dass für unendlich viele n die Ungleichung $a_n < \beta - 1$ gilt. Wir schreiben $a = (\lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\ldots)_\beta$, oder, wenn klar ist, um welche Basis β es sich handelt, einfach nur $a = \lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\ldots$. Für uns von Interesse wird häufig nur der Bruchteil einer Zahl $a = \lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\ldots$ sein, den wir als $\{a\}$ schreiben. Es ist also $\{a\} = 0.a_1a_2a_3\ldots$.

Anmerkung: Eine ähnliche Darstellung wie (2.1) existiert auch bezüglich nichtganzzahligen Basen $\beta > 1$ (siehe Kapitel 8.6, S. 115). In der vorliegenden Arbeit ist aber mit "Basis" stets eine ganze Zahl größer oder gleich 2 gemeint, abgesehen von Kapitel 8.6, in dem eine Verallgemeinerung des Begriffs "normale Zahl" auf nichtganzzahlige Basen angegeben wird.

Bezeichne A_n den Block der ersten n Nachkommaziffern von a. Weiters bezeichnen wir zu jeder ganzen Zahl b, für die $0 \leq b \leq \beta - 1$ gilt, mit $N(b, A_n)$ die Anzahl des Vorkommens der Ziffer b in A_n. Genauer gesagt:

Definition 2.1.1 *Sei $\beta \geq 2$ eine ganze und $a = \lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\ldots$ eine reelle Zahl, sowie b eine ganze Zahl mit $0 \leq b < \beta$. Wir definieren*

$$N(b, A_n) = \#\{i \in \mathbb{N} : \; 0 \leq i \leq n, \; a_i = b\}$$

Eine Zahl a heißt, anschaulich gesprochen, “einfach normal” genau dann, wenn jede mögliche Ziffer in der Entwicklung $0.a_1a_2a_3\ldots$ mit gleicher asymptotischer relativer Häufigkeit auftritt. Genau definieren wir diese Eigenschaft folgendermaßen:

Definition 2.1.2 *Eine reelle Zahl a heißt “einfach normal” zur Basis β genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N(b, A_n) = \frac{1}{\beta}$$

für jede ganze Zahl b mit $0 \le b < \beta$ gilt.

Beispiel 2.1.1 *Die Dezimalzahl $0.\dot{1}23456789\dot{0} = 0.12345678901234567890 12\ldots$ ist einfach normal zur Basis 10, da jede mögliche Ziffer $0 \le b \le 9$ mit einer asymptotischen relativen Häufigkeit von $\frac{1}{10}$ auftritt.*

Anmerkung: Die zu Beginn dieses Kapitels angegebene Bedingung für die Eindeutigkeit der Darstellung reeller Zahlen ist für uns in einem gewissen Sinn irrelevant. Bekanntlich ist etwa $0.29999\dots = 0.30000\ldots$ oder $0.9999\dots = 1.00000$ etc. Für uns ist es aber gleich, welche dieser beiden möglichen Darstellungen gewählt wird, da Zahlen mit nicht eindeutiger β-adischer Darstellung nie einfach normal sind. Bei solchen Zahlen sind nämlich ab einem Index entweder alle Ziffern gleich 0 oder gleich $\beta - 1$, es ist also im Grunde egal, welche der beiden möglichen Darstellungen wir wählen. Dennoch wollen wir, um mögliche Konfusionen zu vermeiden, immer von jener Darstellung mit unendlich vielen Ziffern ungleich $\beta - 1$ ausgehen.

Eine reelle Zahl heißt “normal”, wenn nicht nur jede einzelne Ziffer, sondern jeder mögliche Ziffernblock mit entsprechender Häufigkeit auftritt. Um dies genauer ausdrücken zu können, bezeichnen wir für jeden k-stelligen Ziffernblock $B_k = b_1b_2\ldots b_k$ mit $N(B_k, A_n)$ die Anzahl des Vorkommens des Blockes B_k unter den ersten n Nachkommastellen von einer reellen Zahl a, also in A_n.

Definition 2.1.3 *Sei $\beta \ge 2$ eine ganze und $a = \lfloor a \rfloor.a_1a_2a_3\ldots$ eine reelle Zahl, sowie $B_k = b_1b_2\ldots b_k$ ein k-stelliger Ziffernblock, bestehend aus Ziffern zur Basis β (es gilt also $0 \le b_i < \beta$ für $1 \le i \le k$). Wir definieren*

$$N(B_k, A_n) = \#\{i \in \mathbb{N} :\ 0 < i \le n-k,\ a_i = b_1,\ a_{i+1} = b_2,\ \ldots,\ a_{i+k} = b_k\}$$

Definition 2.1.4 *Eine reelle Zahl a heißt “normal” zur Basis β, wenn für jedes natürliche $k \ge 1$ und jeden k-stelligen Ziffernblock B_k*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) = \frac{1}{\beta^k}$$

gilt.

Ganz offensichtlich ist jede Zahl, welche dieses Kriterium erfüllt, also normal zu einer Basis β ist, auch einfach normal zu derselben Basis, da einzelne Ziffern als einstellige Ziffernblöcke aufgefasst werden können.

Eine normale Zahl explizit anzugeben ist recht kompliziert. Ein Beispiel ist etwa die sogenannte "Champernowne-Zahl" $0.12345678910111213 14\ldots$, die normal zur Basis 10 ist (siehe Kapitel 4.1, Seite 40). Eine einfach normale Zahl muss im Allgemeinen nicht auch normal sein. Die weiter oben angegebene Zahl $0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}\dot{0}$ etwa ist nicht normal zur Basis 10, da beispielsweise der Ziffernblock "13" in ihrer Dezimalentwicklung kein einziges Mal auftritt.

Man beachte auch folgendes: Mit einer Zahl a sind alle Zahlen der Form $a + k$ mit einer beliebigen ganzen Zahl k ebenfalls normal, da diese dieselben Kommastellen besitzen. Dabei beachte man, dass wir mit unserer zu Beginn angegebenen Schreibweise z.B. die Zahl -0.12 als $-1 + 0.88$ schreiben. Es ist daher nicht ad hoc klar, dass mit a auch $-a$ normal ist. Dennoch ist dies der Fall, wie Proposition 2.4.2 zeigen wird.

Eine rationale Zahl kann nicht normal sein (sehr wohl allerdings kann sie einfach normal sein, denn es ist z.B. die Zahl $0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}\dot{0} = 1234567890/9999999999$ einfach normal). Rationale Zahlen sind dadurch charakterisiert, dass ihre β-adische Entwicklung irgendwann periodisch mit einer Periode $p \geq 1$ wird. Das bedeutet aber, dass nicht jeder beliebige Ziffernblock B_k (besonders für $k \geq p$) in dieser Entwicklung aufscheinen kann, insbesondere nicht mit der nötigen asymptotischen relativen Häufigkeit. Daher können rationale Zahlen nicht normal sein.

Andererseits gibt es sehr wohl irrationale Zahlen, die nicht normal sind. Betrachten wir etwa die Dezimalzahl

$$0.0\ 1\ 00\ 1\ 000\ 1\ 0000\ 1\ 00000\ 1\ \ldots.$$

Diese Zahl ist nicht periodisch und daher nicht rational, die Ziffern "2", "3" etc. treten allerdings kein einziges mal auf, weswegen die Zahl nicht einfach normal zur Basis 10 und daher auch nicht normal zur Basis 10 sein kann. Wir stellen also fest: die Menge der normalen Zahlen bildet eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Zuletzt noch folgende Definition:

Definition 2.1.5 *Eine reelle Zahl a heißt "absolut normal", wenn sie normal zu jeder Basis $\beta \geq 2$ ist.*

2.2 Theorie der Gleichverteilung

Es gibt enge Zusammenhänge zwischen dem Konzept der "Normalen Zahlen" und der "Theorie der Gleichverteilung". Um einige wichtige Aussagen über normale Zahlen gewinnen zu können, müssen wir uns daher zuerst einen Einblick in die Theorie der Gleichverteilung verschaffen. In diesem Kapitel soll deshalb ein kleiner Überblick über diesen Bereich gegeben werden, einschließlich des berühmten "Weyl'schen Kriteriums", das wir später noch mehrmals benötigen werden. Wir folgen dabei im Wesentlichen der Vorgehensweise von E. Hlawka [52].

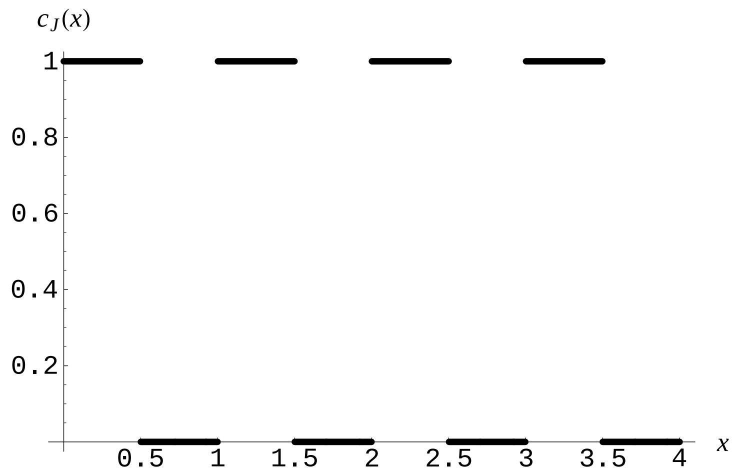
Den Begriff der "Gleichverteilung" von Folgen verwendeten zuerst P. Bohl und W. Sierpiński, aber erst durch die berühmte Arbeit von Hermann Weyl [154] aus dem Jahr 1916 wurde die Tragweite dieses Begriffs offenbar.

Definition 2.2.1 *Wir definieren die "periodische Fortsetzung der charakteristischen Funktion" c_J eines Intervalls $J \subset [0,1]$ als*

$$c_J(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x - \lfloor x \rfloor \in J \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Man beachte, dass diese Funktion c_J, im Gegensatz zur gewönlichen charakteristischen Funktion, nicht nur im Bereich des Intervalls J Werte ungleich 0 annimmt. Um unsere Definition der periodischen Fortsetzung der charakteristischen Funktion zu veranschaulichen möge folgendes Beispiel dienen:

Beispiel 2.2.1 *Bezeichne J das Intervall $[0, 0.5]$. Dann sieht die charakteristische Funktion c_J folgendermaßen aus:*



Eine Folge $\omega(n)$ mit Werten aus $[0,1]$ heißt nun "gleichverteilt", wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\omega(n)$ in einem Teilintervall $J \subset [0,1]$ liegt, mit dem Maß (also in unserem Fall der Länge) dieses Intervalls übereinstimmt. Die Länge $l(J)$ eines Intervalls $J \subset [0,1]$ ist gegeben durch

$$l(J) = \int_0^1 c_J(x)\ dx$$

Für jede natürliche Zahl N bezeichnen wir mit $A(\omega, N, J)$ die Anzahl jener Folgenglieder $\omega(n)$, für die $n \leq N$ und $\omega(n) \in J$ gilt. Offensichtlich ist $A(\omega, N, J) = \sum_{n=1}^{N} c_J(\omega(n))$. Damit können wir folgende Definition angeben:

Definition 2.2.2 *Eine Folge $\omega(n)$ mit Werten aus $[0,1]$ heißt "gleichverteilt", falls für alle Teilintervalle $J \in [0,1]$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_J(\omega(n)) = \int_0^1 c_J(x)\ dx$$

gilt.

Eine allgemeine reellwertige Folge $\omega(n)$ nennt man "gleichverteilt modulo 1", falls die zugehörige Folge der Bruchteile $\omega'(n) = \{\omega(n)\}$ gleichverteilt ist. Wir definieren "Gleichverteilung modulo 1" also folgendermaßen:

Definition 2.2.3 *Eine reellwertige Folge $\omega(n)$ heißt "gleichverteilt modulo 1", falls*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_J(\omega(n)) = \int_0^1 c_J(x)\ dx$$

ist.

Dies ist dasselbe Kriterium wie weiter oben für Gleichverteilung einer Folge, was aus unserer Definition der Funktion c_J resultiert; es ist nämlich offensichtlich $c_J(\{x\}) = c_J(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Daraus lassen sich unmittelbar weitere Charakterisierungen für modulo 1 gleichverteilte Folgen gewinnen (für ausführliche Beweise siehe E.Hlawka [52, S. 5-9]), etwa die folgenden:

Charakterisierung 1: Eine Folge $\omega(n)$ ist gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\omega(n)) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

für alle Riemann-intergrierbaren Funktionen mit Periode 1 $f(x)$ gilt.

Charakterisierung 2: Eine Folge $\omega(n)$ ist gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\omega(n)) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

für alle komplexwertigen stetigen Funktionen $f(x)$ mit Periode 1 gilt.

Charakterisierung 3: Eine Folge $\omega(n)$ ist gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\omega(n)) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

für alle trigonometrischen Polynome $f(x)$ gilt. Als trigonometrisches Polynom bezeichnen wir dabei einen Ausdruck der Form

$$\sum_{h=P}^{Q} c_h\, e^{2\pi i h x}$$

mit komplexen Koeffizienten c_h. Um diese letzte Charakterisierung zu erhalten verwendet man den Approximationssatz von Weierstraß, demzufolge es für jede reellwertige, 1-periodische stetige Funktion $f(x)$ und jedes $\epsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $T(x)$ mit

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon$$

gibt, wobei $T(x)$ reellwertig vorausgesetzt werden kann.

Es gilt

$$\int_0^1 e^{2\pi i h x}\, dx = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

womit wir das berühmte “Weyl’sche Kriterium” erhalten:

Satz 2.2.1 (Weyl’sches Kriterium) *Eine reellwertige Folge $\omega(n)$ ist gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h \omega(n)} = 0$$

für alle ganzzahligen $h \neq 0$ gilt.

Betrachten wir nun spezielle Folgen von der Form $\omega(n) = na$ für eine beliebige reelle Zahl a. Falls a rational ist, also von der Form $a = \frac{p}{q}$, dann ist für beliebige $n, h \in \mathbb{N}$ der Bruchteil $\{na\}$ gleich dem Bruchteil $\{(n + hq)a\}$. Insbesonders nimmt $\{\omega(n)\}$ nur endlich viele verschiedene Werte an und daher ist ω nicht gleichverteilt modulo 1.

Wenn hingegen a irrational ist, dann ist ha für keine natürliche Zahl h ganzzahlig. Deshalb ist in diesem Fall stets $e^{2\pi iha} \neq 1$. Mithilfe der geometrischen Summenformel berechnen wir

$$\begin{aligned} & \lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ihna} \right| \\ = & \lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (e^{2\pi iha})^n \right| \\ = & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left| e^{2\pi iha} \frac{1-(e^{2\pi iha})^N}{1-e^{2\pi iha}} \right| \\ \leq & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \frac{2}{|1-e^{2\pi iha}|} = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit dem Weyl'schen Kriterium der folgende Satz:

Satz 2.2.2 (Kronecker'scher Approximationssatz) *Für eine beliebige reelle Zahl a ist die Folge $a, 2a, 3a, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 genau dann wenn a irrational ist.*

2.3 Äquivalenz verschiedener Definitionen

Die ursprüngliche, von E. Borel [14] im Jahr 1909 gegebene Definition für Normalität einer Zahl zur Basis 10 lautete folgendermaßen:

> *"Nous dirons qu'un nombre est* entièrement normal *par rapport à la base 10 (ou, pour abréger,* normal *par rapport à cette base), lorsque ce nombre et ses produits par les diverses puissances de 10 sont* simplement normaux *par rapport à toutes les bases égales à une puissance de 10:* 10, 100, 1000, $\ldots$, 10^n, $\ldots$ "

Eine Zahl a ist nach dieser Definition (bzw. einer Verallgemeinerung davon) also normal zu einer Basis β genau dann, wenn jede der Zahlen $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ jeweils einfach normal zu jeder der Basen $\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots$ ist.

S.S. Pillai zeigt in einem kurzen, aber fehlerhaften (siehe Pillai [111]) bzw. einem längeren, korrekten Beweis (siehe Pillai [112]) dass diese Definition überflüssige Bedingungen enthält und zu folgender äquivalent ist: Eine Zahl a ist normal zu einer Basis β genau dann, wenn a einfach normal zu allen Basen $\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots$ ist.

E. Borel behauptet weiter:

“La propriété caractéristique d’un nombre normal est la suivante: un groupement quelconque de p chiffres consécutifs étant considéré, si l’on désigne par c_n le nombre de fois que se recontre ce groupement dans les n premiers chiffres décimaux, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \frac{1}{10^p}.\text{”}$$

Das ist genau jene Eigenschaft, die wir in Kapitel 2.1 zur Definition normaler Zahlen herangezogen haben. E. Borel liefert keinen Beweis, dass diese Definition zu der von ihm gegebenen äquivalent ist. Wir werden hier einen solchen Beweis führen. Wir verwenden dabei die in Kapitel 2.1 eingeführten Bezeichnungen und Schreibweisen.

Zunächst zeigen wir allerdings noch ein einfaches technisches Lemma, das wir öfters benötigen werden. Wir folgen dem Beweis von I. Niven [101].

Lemma 2.3.1 *Seien $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ reellwertige Funktionen einer Variablen x, welche die Bedingungen*

$$\lim_{x\to\infty} \big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)\big) = 1$$

und

$$\liminf_{x\to\infty} f_i(x) \geq \frac{1}{m} \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

erfüllen.

Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x) = \frac{1}{m} \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Beweis: Sei oBdA. $i = 1$. Es ist nun

$$\begin{aligned} 1 &= \limsup \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \geq \limsup f_1(x) + \liminf \sum_{j=2}^{m} f_j(x) \\ &\geq \limsup f_1(x) + \sum_{j=2}^{m} \liminf f_j(x) \\ &\geq \limsup f_1(x) + \frac{m-1}{m}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Es ist also $\limsup f_1(x) \leq 1/m \leq \liminf f_1(x)$, und daher ist $\lim f_1(x) = 1/m$. Dasselbe gilt auch für f_2, f_3 etc. $\square$

Auf dieselbe Weise kann man das folgende ähnliche Lemma zeigen:

Lemma 2.3.2 *Seien $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ reellwertige Funktionen einer Variablen x, welche die Bedingungen*

$$\lim_{x\to\infty} \big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)\big) = 1$$

und

$$\limsup_{x\to\infty} f_i(x) \leq \frac{1}{m} \quad \textit{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

erfüllen. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x) = \frac{1}{m} \quad \textit{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Wir zeigen nun den folgenden Satz:

Satz 2.3.1 *Folgende Definitionen sind äquivalent:*

Definition 1: *Eine reelle Zahl a heißt "normal" zur Basis β, wenn für jedes natürliche $k \geq 1$ und jeden k-stelligen Block B_k*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) = \beta^{-k} \tag{2.3}$$

gilt.

Definition 2: *Eine reelle Zahl a heißt "normal" zur Basis β, falls jede der Zahlen $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ einfach normal zu jeder der Basen $\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots$ ist.*

Definition 3: *Eine reelle Zahl a heißt "normal" zur Basis β, falls sie einfach normal zu jeder der Basen $\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots$ ist.*

Offensichtlich erfüllt jede Zahl, die normal nach Definition 2 ist, auch Definition 3. Wir zeigen noch folgende Implikationen:
Definition 2 $\Rightarrow$ Definition 1
Definition 1 $\Rightarrow$ Definition 2
Definition 3 $\Rightarrow$ Definition 1
Der Beweis von Implikation (Definition 2 $\Rightarrow$ Definition 1) wäre zum Zeigen der Äquivalenz der drei Definitionen nicht notwendig, soll aber (da sehr kurz) dennoch angeführt werden. Aus den Implikationen (Definition 2 $\Rightarrow$ Definition 3), (Definition 1 $\Rightarrow$ Definition 2) und (Definition 3 $\Rightarrow$ Definition 1) folgt insgesamt (Definition 2 $\Rightarrow$ Definition 3 $\Rightarrow$ Definition 1 $\Rightarrow$ Definition 2) und damit die Äquivalenz aller drei Definitionen.

Zunächst versuchen wir, das Wesen der letzten beiden Definitionen besser zu erfassen. Die in Kapitel 2.1 eingeführte Bezeichnung $N(B_k, A_n)$ für die Anzahl des Vorkommens des k-stelligen Ziffernblocks $B_k = b_1 b_2 \dots b_k$ unter den ersten n Ziffern A_n einer reellen Zahl a lässt sich folgendermaßen erweitern: Wir teilen $N(B_k, A_n)$ in k Teile

$$N(B_k, A_n) = \sum_{s=1}^{k} N_s(B_k, A_n)$$

wobei $N_s(B_k, A_n)$ die Anzahl des Vorkommens von B_k in A_n angibt, also $b_1 = a_j, b_2 = a_{j+1}$ etc, wobei die Bedingung $j \equiv s \pmod{k}$ erfüllt ist. Jetzt können wir Definition 2 in folgender Weise umformulieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_s(B_k, A_n) = \frac{1}{k}\beta^{-k} \quad \text{für alle} \quad k, s, B_k. \tag{2.4}$$

Definition 3 lässt sich umformulieren zu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_1(B_k, A_n) = \frac{1}{k}\beta^{-k} \tag{2.5}$$

Erfülle nun eine Zahl a die Bedingung (2.4), sei also normal nach Definition 2. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) \\ = \; & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{k} N_s(B_k, A_n) \\ = \; & \sum_{s=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_s(B_k, A_n) \\ = \; & \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k}\beta^{-k} = \beta^{-k} \end{aligned}$$

Somit ist a auch normal nach Definition 1, es gilt also (Definition 2 $\Rightarrow$ Definition 1).

Nun zeigen wir dass jede reelle Zahl a, die normal gemäß Definition 2 ist, ebenfalls normal laut Definition 1 ist. Dieses Resultat zeigten erstmals I. Niven und H.S. Zuckerman [102] im Jahr 1951. Wir folgen hier dem bei I. Niven [101] gegebenen Beweis, der wiederum auf einen von J.W.S. Cassels [21] stammenden Beweis aus dem Jahr 1952 zurückgeht.

Wir verwenden dabei folgende Schreibweise: D_n bezeichne einen beliebigen n-stelligen Ziffernblock zur Basis β. Es gibt genau β^n verscheidene solche Ziffernblöcke. Mit $p(n, j)$

bezeichnen wir jene dieser Ziffernblöcke, welche eine feste Ziffer b genau j mal enthalten, also jene Ziffernblöcke, für die $N(b, D_n) = j$ gilt. Es läßt sich leicht feststellen, dass

$$p(n,j) = \frac{n!}{j!(n-j)!}(\beta-1)^{n-j} \quad \text{für} \quad 0 \le j \le n \tag{2.6}$$

ist. Wir zeigen nun einige technische Lemmata:

Lemma 2.3.3 *Für* $0 < x < 1$ *gilt* $1 - x < e^{-x}$.

Beweis: Wir benutzen die Entwicklung

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots > 1 - x. \quad \square$$

Lemma 2.3.4 *Für* $j \ge 2$ *gilt*

$$p(n\beta, n+j) < \beta^{n\beta} e^{-j^2/4n\beta}$$

Beweis: Es ist wegen Gleichung (2.6) und Lemma 2.3.3

$$\begin{aligned}
&\frac{p(n\beta, n+j)}{p(n\beta, n)} \\
= \; & \frac{(n\beta-n)(n\beta-n-1)\dots(n\beta-n-j+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+j)(\beta-1)^j} \\
= \; & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\dots\left(1+\frac{j}{n}\right)^{-1} \cdot \frac{(\beta-1)\left(\beta-1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(\beta-1--\frac{j-1}{n}\right)}{(\beta-1)^j} \\
< \; & \frac{(\beta-1)\left(\beta-1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(\beta-1-\frac{j-1}{n}\right)}{(\beta-1)^j} \\
= \; & \left(1-\frac{1}{n(\beta-1)}\right)\left(1-\frac{2}{n(\beta-1)}\right)\dots\left(1-\frac{j-1}{n(\beta-1)}\right) \\
< \; & e^{-\frac{1}{n(\beta-1)}}\; e^{-\frac{2}{n(\beta-1)}} \dots e^{-\frac{j-1}{n(\beta-1)}} \\
= \; & e^{-\frac{1}{n(\beta-1)}-\frac{2}{n(\beta-1)}-\dots-\frac{j-1}{n(\beta-1)}} \\
= \; & e^{-j(j-1)/2n(\beta-1)} \\
< \; & e^{-j^2/4n\beta}.
\end{aligned}$$

Außerdem ist offensichtlich

$$p(n\beta, n) < \sum_{j=0}^{n\beta} p(n\beta, j) = \beta^{n\beta}. \tag{2.7}$$

Damit ist das Lemma gezeigt. $\square$

Lemma 2.3.5 *Für $j \geq 2$ gilt*

$$p(n\beta, n-j) < \beta^{n\beta} e^{-j^2/4n\beta}$$

Beweis: Dieses Lemma läßt sich ähnlich wie das vorhergehende beweisen. Es ist

$$\begin{aligned}
&\frac{p(n\beta, n-j)}{p(n\beta, n)} \\
= \quad & \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)(\beta-1)^j}{(n\beta-n+1)(n\beta-n+2)\dots(n\beta-n+j)} \\
= \quad & \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\cdot\frac{(\beta-1)^j}{(\beta-1+1/n)(\beta-1+2/n)\dots(\beta-1+j/n)} \\
< \quad & \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{j-1}{n}\right) \\
< \quad & e^{-\frac{1}{n}}\, e^{-\frac{2}{n}} \dots e^{-\frac{j-1}{n}} \\
= \quad & e^{-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\dots-\frac{j-1}{n}} \\
= \quad & e^{-j(j-1)/2n} \\
< \quad & e^{-j^2/4n\beta}
\end{aligned}$$

Damit und mittels Abschätzung (2.7) ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 2.3.6 *Gegeben sei eine reelle Zahl $\epsilon > 0$ und eine natürliche Zahl $b < \beta$. Für hinreichend großes n ist dann die Anzahl jener $n\beta$-stelligen Ziffernblöcke $D_{n\beta}$, für die*

$$|N(b, D_{n\beta}) - n| > n\epsilon \tag{2.8}$$

gilt, kleiner als $(n\beta)\beta^{n\beta}(1+c_1)^{-n}$, wobei $c_1 = c_1(\epsilon)$ eine positive Konstante bezeichnet, die nicht von n abhängt.

Beweis: Die Anzahl jener Ziffernblöcke, die (2.8) erfüllen, ist gegeben durch

$$\sum_{k>n+n\epsilon} p(n\beta, k) + \sum_{k<n-n\epsilon} p(n\beta, k) = \sum_{|j|>n\epsilon} p(n\beta, n+j).$$

Diese Summe läßt sich folgendermaßen abschätzen:
Wir wählen n so groß, dass $n\epsilon > 1$ ist. Dann hat die Summe auf der rechten Seite der vorigen Gleichung weniger als $n\beta$ Summanden größer als Null. Für die Summanden gilt außerdem, wie sich aus den beiden vorhergehenden Lemmata ablesen lässt,

$$p(n\beta, n+j) < \beta^{n\beta} e^{-j^2/4n\beta} < \beta^{n\beta} e^{-(n\epsilon)^2/4n\beta} = \beta^{n\beta} e^{-n\epsilon^2/4\beta}.$$

Daher ist die Anzahl der Ziffernblöcke, die Gleichung (2.8) genügen, höchstens gleich

$$(n\beta)\beta^{n\beta} e^{-n\epsilon^2/4\beta} = (n\beta)\beta^{n\beta}(1+c_1)^{-n},$$

wobei c_1 eine positive Konstante, gegeben durch die Gleichung $1 + c_1 = e^{\epsilon^2/4\beta}$ und somit unabhängig von n, bezeichnet. Damit ist das Lemma gezeigt. □

Lemma 2.3.7 *Für hinreichend großes m ist die Zahl aller m-stelligen Zifferblöcke D_m, welche die Ungleichung*

$$\left|N(b, D_m) - \frac{m}{\beta}\right| > m\epsilon \tag{2.9}$$

erfüllen, kleiner als $m\beta^m(1+c)^{-m}$, wobei c eine positive, von m unabhängige Konstante bezeichnet.

Beweis: Falls m ein Vielfaches von β ist, können wir dieses Lemma auf das vorhergehende zurückführen. Wir müssen hier also nur noch das vorige Lemma auf den Fall $m = n\beta + d$ mit $0 \leq d < \beta$ erweitern. Wir zeigen zuerst folgendes: Falls D_m, ein $m-$stelliger Ziffernblock, Ungleichung (2.9) erfüllt, dann erfüllen die ersten $n\beta$ Stellen dieses Blockes, $D_{n\beta}$, Ungleichung (2.8). Bezeichne also D_m einen m-stelligen Ziffernblock, der (2.9) erfüllt. Dann ergibt sich für $0 \leq b < \beta$ mittels der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} m\epsilon &< \left|N(b, D_m) - \frac{m}{\beta}\right| \\ &\leq |N(b, D_m) - N(b, D_{n\beta})| + |N(b, D_{n\beta}) - n| + \left|n - \frac{m}{r}\right| \\ &\leq d + |N(b, D_{n\beta}) - n| + 1 \end{aligned}$$

woraus mit hinreichend großem n auch

$$|N(b, D_{n\beta}) - n| > m\epsilon - d - 1 \geq n\beta\epsilon - d - 1 > n\epsilon$$

und somit Ungleichung (2.8) folgt. Damit läßt sich das Lemma beweisen, indem wir die Abschätzung im vorigen Lemma mit β^d multiplizieren, um die d zusätzlichen Stellen zu berücksichtigen. Das ergibt die obere Grenze

$$\beta^d(n\beta)\beta^{n\beta}(1+c_1)^{-n} \leq m\beta^m\big((1+c_1)^{n/m}\big)^{-m} < m\beta^m\big((1+c_1)^{1/2\beta}\big)^{-m} = m\beta^m(1+c)^{-m}.$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Lemma 2.3.8 *Seien β, k und s natürliche Zahlen mit $\beta \geq 2$ und $1 \leq s \leq k$. B_k bezeichne einen festen k-stelligen Ziffernblock zur Basis β und ϵ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann ist für alle hinreichend großen t die Ungleichung*

$$N_s(B_k, X_t) > \frac{t}{k\beta^k} - \frac{2\epsilon t}{k} \tag{2.10}$$

für alle t-stelligen Ziffernblöcke X_t erfüllt, abgesehen von einer Ausnahmemenge von maximal $\epsilon\beta^t$ Blöcken.

Beweis: Zuerst müssen wir das vorhergehende Lemma umformulieren, indem wir die Basis β durch β^k ersetzen. Dann ist die Anzahl jener m-stelligen Ziffernblöcke D_m, die

$$\left| N(b, D_m) - \frac{m}{\beta^k} \right| > m\epsilon$$

erfüllen, kleiner als $m\beta^{km}(1+c)^{-m}$ für eine positive Konstante c, die von m unabhängig ist. Dabei bezeichnet b eine einzelne Ziffer zur Basis β^k. Anders gesagt, wird die Ungleichung

$$m\epsilon \geq N(b, D_m) - \frac{m}{\beta^k} \geq -m\epsilon$$

von allen außer höchstens $m\beta^{km}(1+c)^{-m}$ Ziffernblöcken D_m erfüllt. Also wird auch die Ungleichung

$$N(b, D_m) \geq \frac{m}{\beta^k} - m\epsilon \tag{2.11}$$

von allen außer höchstens $m\beta^{km}(1+c)^{-m}$ Ziffernblöcken D_m erfüllt. Interpretiert man dieses Ergebnis bezüglich der Basis β, dann entspricht die Ziffer b einem k-stelligen Ziffernblock B_k und D_m wird zu einem mk-stelligen Ziffernblock D_{mk}. Damit entspricht $N(b, D_m)$ nun $N_1(B_k, D_{mk})$. Wir erweitern dies zur Beziehung

$$N_1(B_k, D_{mk}) = N_s(B_k, X_t) \tag{2.12}$$

wobei X_t den Ziffernblock D_{mk} bezeichne, links erweitert um $s-1$ und rechts um $t - mk - (s-1)$ Ziffern. Gleichung (2.12) gilt jedenfalls dann, wenn rechts weniger als k Ziffern hinzugefügt wurden. Dies können wir erreichen, wenn wir für gegebenes t, k und s die Zahl m so festlegen, dass

$$t - s + 1 = mk + u \quad \text{mit} \quad 0 \leq u < k$$

gilt. Dann ist

$$mk \leq t < mk + 2k \quad \text{und} \quad \frac{t}{k} \geq m > \frac{t}{k} - 2. \tag{2.13}$$

Damit gilt also Gleichung (2.12), indem wir X_t so gebildet haben, dass

$$X_t = x_1 x_2 \dots x_t = x_1 x_2 \dots x_{s-1} d_1 d_2 \dots d_{mk} x_{t-u+1} x_{t-u+2} \dots x_t$$

ist, mit jeweils weniger als k Ziffern links bzw. rechts von D_{mk}, da $s - 1 < k$ und $u < k$ gilt. Zu einem festen Ziffernblock D_{mk} gibt es β^{t-mk} mögliche Blöcke X_t. Daher können wir aus (2.11) und (2.12) schließen, dass für alle hinreichend großen t die Ungleichung

$$N_s(B_k, X_t) \geq \frac{m}{\beta^k} - m\epsilon \tag{2.14}$$

für alle t-stelligen Ziffernblöcke X_t gilt, abgesehen von höchstens

$$m\beta^{km}(1+c)^{-m}\beta^{t-km} = m\beta^t(1+c)^{-m}$$

Ausnahmeblöcken. Für $t \to \infty$ gilt auch $m \to \infty$ und damit $m(1+c)^{-m} \to 0$. Also gilt Ungleichung (2.14) für alle X_t, abgesehen von höchstens $\epsilon\beta^t$ Ausnahmeblöcken, sofern t groß genug gewählt wird. Außerdem ist $\epsilon t/k > 2/\beta^k$ für hinreichend großes t, und damit aufgrund von (2.13) auch

$$\frac{m}{\beta^k} - m\epsilon > \left(\frac{t}{k} - 2\right)\frac{1}{\beta^k} - \left(\frac{t}{k}\right)\epsilon = \frac{t}{k\beta^k} - \frac{t\epsilon}{k} - \frac{2}{\beta^k} > \frac{t}{k\beta^k} - \frac{2\epsilon t}{k}.$$

Damit erfüllt jeder Block X_t, für den Ungleichung (2.14) gilt, ebenfalls Ungleichung (2.10), und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Damit haben wir das nötige Rüstzeug beisammen, um folgendes zu zeigen:

Sei a eine reelle Zahl, die normal zur Basis β gemäß Definition 1 ist, also Gleichung (2.3) erfüllt. Dann ist diese Zahl auch normal zu derselben Basis gemäß Definition 2, erfüllt also Gleichung (2.4).

Beweis: Es sei $a = \lfloor a \rfloor.a_1a_2a_3\ldots$. Aus Gleichung (2.3) folgt, dass für jedes reelle $\epsilon > 0$ und jeden t-stelligen Ziffernblock D_t die Ungleichung

$$N(D_t, A_n) > \frac{n}{\beta^t} - \frac{\epsilon n}{\beta^t} = \frac{n(1-\epsilon)}{\beta^t} \tag{2.15}$$

für hinreichend großes n gilt. Wir haben $N_s(B_k, A_n)$ definiert als die Anzahl des Vorkommens eines k-stelligen Ziffernblocks in A_n, also $b_1 = a_m, \ldots, b_k = a_{m+k-1}$ mit $m \equiv s \pmod{k}$. Es gilt die Ungleichung

$$(t-k+1)\ N_s(B_k, A_n) \geq \sum_{j=1}^{n-t+1} N_s(B_k, a_j a_{j+1} \ldots a_{j+t-1}) \tag{2.16}$$

da dabei auf der linken Seite jedes Erscheinen des Ziffernblocks B_k der obengenannten Form genau $t-k+1$ mal, auf der rechten Seite aber höchstens ebenso oft auftritt.

Wir versuchen nun, die rechte Seite von Gleichung (2.16) abzuschätzen. Die Summe erstreckt sich über Werte j von 1 bis $n-t+1$, wobei der Ziffernblock $a_ja_{j+1}\ldots a_{j+t-1}$ mit jedem festen, ebenfalls t-stelligen Ziffernblock D_t aufgrund von (2.15) öfter als mindestens $n\beta^{-t}(1-\epsilon)$ mal übereinstimmt. Daher läßt sich die Summe in (2.16) umschreiben zu einer Summe über alle β^t möglichen Blöcke D_t, also

$$(t-k+1)\ N_s(B_k, A_n) > n\beta^{-t}(1-\epsilon)\sum_{D_t} N_\sigma(B_k, D_t).$$

Dabei erstreckt sich die Summe auf der rechten Seite über alle möglichen Blöcke D_t, wobei der unbestimmte Index σ nicht genauer festgelegt werden muss, da wir nun Lemma 2.3.8 anwenden werden. Wir wenden also Ungleichung (2.10) auf $N_\sigma(B_k, D_t)$

in allen Fällen von Nicht-Ausnahmeblöcken D_t an, also in mindestens $\beta^t - \epsilon\beta^t$ Fällen. Ohne die Ausnahmeblöcke zu berücksichtigen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
(t-k+1)\ N_s(B_k, A_n) &> n\beta^{-t}(1-\epsilon)(\beta^t - \epsilon\beta^t)\Big(\frac{t}{k\beta^k} - \frac{2\epsilon t}{k}\Big) \\
&= nt\Big(\frac{1}{k\beta^k} - \frac{2\epsilon}{k}\Big)(1-\epsilon)^2 \\
&> nt\Big(\frac{1}{k\beta^k} - 2\epsilon\Big)(1-2\epsilon) \\
&> nt\Big(\frac{1}{k\beta^k} - 4\epsilon\Big)
\end{aligned}$$

für hinreichend große t und n und kleines $\epsilon > 0$.

Damit ist für jedes (kleine) $\epsilon > 0$

$$\frac{N_s(B_k, A_n)}{n} > \frac{t}{t-k+1}\Big(\frac{1}{k\beta^k} - 4\epsilon\Big) > \frac{1}{k\beta^k} - 4\epsilon$$

und damit

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{N_s(B_k, A_n)}{n} \geq \frac{1}{k\beta^k}.$$

Da dieses Ergebnis für alle β^k möglichen Blöcke B_k und alle k möglichen Werte für s gilt, muss der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_s(B_k, A_n)}{n}$$

laut Lemma 2.3.1 existieren und gleich $1/(k\beta^k)$ sein. Damit erfüllt die Zahl a auch Ungleichung (2.4) und ist somit normal nach Definition 2. Wir erhalten also insgesamt: (Definition 1 $\Rightarrow$ Definition 2).

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass jede reelle Zahl a, die normal zu einer Basis β gemäß Definition 3 ist, ebenfalls normal zu derselben Basis entsprechend Definition 1 ist. Dieses Ergebnis wurde erstmals von S.S. Pillai 1939 in einem kurzen, aber fehlerhaften (Pillai [111]), bzw. 1940 in einem komplizierteren, korrekten Beweis (Pillai [112]) gezeigt.

Gegeben sei eine reelle Zahl a, die normal zur Basis β gemäß Definition 3 ist, also Gleichung (2.5) erfüllt. Dann ist, wie man sofort sieht, für jedes ganze $t \geq 1$, jeden beliebigen t-stelligen Ziffernblock D_t und jedes reelle $\epsilon > 0$

$$N_1(D_t, A_n) > \frac{n}{t\beta^t} - \frac{\epsilon n}{t\beta^t} \tag{2.17}$$

für hinreichend großes n. Weiters gilt, für $k < t < n$,

$$N(B_k, A_n) \geq \sum_{D_t} N(B_k, D_t) N_1(D_t, X_n) > \left(\frac{n}{t\beta^t} - \frac{\epsilon n}{t\beta^t} \right) \sum_{D_t} N(B_k, D_t), \tag{2.18}$$

wobei sich die letzte Ungleichung aus (2.17) ergibt. Diese Abschätzung ergibt sich indem man A_n in aufeinanderfolgende Blöcke mit jeweils t Ziffern unterteilt und $N_1(D_t, A_n)$ zählt, dann $N(B_k, D_t)$ bestimmt, die offensichtliche Multiplikation ausführt und über alle möglichen Blöcke D_t summiert. Der Ausdruck $N(B_k, D_t)$ kann auch geschrieben werden als

$$N(B_k, D_t) = \sum_{s=1}^{k} N_s(B_k, D_t).$$

Dann gilt, unter Verwendung von Lemma 2.3.8 und mit Berücksichtigung von Ungleichung (2.18),

$$\begin{aligned} N(B_k, A_n) &> \left(\frac{n}{t\beta^t} - \frac{\epsilon n}{t\beta^t} \right) (\beta^t - \epsilon\beta^t) k \left(\frac{t}{k\beta^k} - \frac{2\epsilon t}{k} \right) \\ &= n \left(\frac{1}{\beta^k} - 2\epsilon \right) (1 - \epsilon)^2 \\ &> n(\beta^{-k} - 2\epsilon)(1 - 2\epsilon) \\ &> n(\beta^{-k} - 4\epsilon) \end{aligned}$$

für hinreichend großes n und kleines $\epsilon > 0$.

Damit ist

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} \geq \frac{1}{\beta^k}$$

für jeden der β^k möglichen k-stelligen Ziffernblöcke B_k. Daher muss laut Lemma 2.3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} = \frac{1}{\beta^k}$$

sein, also ist Gleichung (2.3) erfüllt und somit a normal zur Basis β gemäß Definition 1.

Damit ist die Äquivalenz der drei auf Seite 12 angeführten Definitionen gezeigt. $\square$

Eine noch genauere Charakterisierung normaler Zahlen liefert folgender Satz von C.T. Long [79] aus dem Jahr 1957:

Satz 2.3.2 *Eine reelle Zahl a ist normal zur Basis β genau dann, wenn es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ gibt, so dass a einfach normal zu allen Basen $\beta^{m_1}, \beta^{m_2}, \beta^{m_3}, \dots$ ist. Wenn es nur eine endliche Menge solcher m_i gibt, dann ist a nicht normal zur Basis β.*

Beweis: Die Notwendigkeit der ersten Bedingung folgt sofort aus der Definition von Normalität (siehe Definition 3, S. 12). Sei nun die erste Bedingung erfüllt, zu einer Zahl a existiere also eine streng monoton wachsende Folge $m_1, m_2, m_3, \ldots,$ so dass a einfach normal zu allen Basen $\beta^{m_1}, \beta^{m_2}, \beta^{m_3}, \ldots$ ist. Sei k eine beliebige positive natürliche Zahl und B_k ein k-stelliger Block von Ziffern zur Basis β. Wir wählen eine natürliche Zahl j so groß dass $m_j > k$ erfüllt ist. So ein j muss existieren, da die Folge $m_1, m_2, m_3, \ldots$ gegen Unendlich strebt. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(D_{m_j}, A_n)}{n} = \frac{1}{m_j \beta^{m_j}}$$

für jeden beliebigen m_j-stelligen Ziffernblock D_{m_j}, wie sich aus Definition 3 für die Normalität einer Zahl (siehe Seite 12) ergibt. Falls B_k in jedem möglichen Block D_{m_j} genau $t = t(D_{m_j})$ mal auftritt, dann ist

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} \geq \frac{\sum_{D_{m_j}} t(D_{m_j})}{m_j \beta^{m_j}}$$

wobei sich die Summe auf der rechten Seite über alle β^{m_j} möglichen m_j-stelligen Ziffernblöcke D_{m_j} erstreckt. Es gibt nun genau $\beta^{m_j - k}$ verschiedene Ziffernblöcke D_{m_j}, welche B_k jeweils beginnend bei Position i für $i = 1, 2, \ldots, m_j - k + 1$ enthalten, sodass also

$$\sum_{D_{m_j}} t(D_{m_j}) = (m_j - k + 1)\beta^{m_j - k}$$

ist. Es gilt also

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} \geq \frac{(m_j - k + 1)\beta^{m_j - k}}{m_j \beta^{m_j}} = \frac{1}{\beta^k} - \frac{k-1}{m_j \beta^k},$$

und daher, da j und somit m_j beliebig groß gewählt werden können,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} \geq \frac{1}{\beta^k},$$

woraus mit Lemma 2.3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} = \frac{1}{\beta^k}$$

folgt. Somit ist a normal zur Basis β und der erste Teil des Satzes gezeigt.

Seien nun $m_1, m_2, \ldots, m_s$ beliebige verschiedene, positive natürliche Zahlen. Dann existiert mindestens eine Zahl a, die einfach normal zu allen Basen $\beta^{m_1}, \beta^{m_2}, \ldots, \beta^{m_s}$, aber nicht normal zur Basis β ist. Sei a gegeben als die folgende periodische Zahl zur Basis β^m, wobei $m = kgV(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ sei:

$$a = 0.\dot{0}\dot{1}\dot{2}\ldots(\beta^m \dot{-} 1).$$

Offensichtlich ist a einfach normal zur Basis β^m und (da periodisch) nicht normal zur Basis β. Um zu zeigen, dass a einfach normal zu allen Basen β^{m_j} für $j = 1, 2, \ldots, s$ ist, gehen wir folgendermaßen vor: Sei k eine beliebige Zahl, die m teilt, also $m = qk$ für passendes $q \in \mathbb{N}$. B_k sei ein beliebiger k-stelliger Ziffernblock zur Basis β. Unter Berücksichtigung unserer dritten Definition für Normalität (siehe Seite 12) genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(B_k, A_n)}{n} = \frac{1}{k\beta^k}$$

ist. Wie sich leicht zeigen läßt gibt es $\binom{q}{i}(\beta^k - 1)^{q-i}$ verschiedene m-stellige Ziffernblöcke D_m, die B_k genau i mal, jeweils beginnend bei Positionen kongruent 1 modulo k, enthalten. Daher gilt, weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(D_m, A_n)}{n} = \frac{1}{m\beta^m}$$

für jeden Block D_m ist,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(B_k, A_n)}{n} = \frac{1}{m\beta^m} \sum_{i=1}^{q} i \binom{q}{i} (\beta^k - 1)^{q-i} = \frac{1}{k\beta^k},$$

womit die Behauptung gezeigt und der Satz bewiesen ist. □

2.4 Normale Zahlen und Gleichverteilung modulo 1

Eine enge Beziehung zwischen normalen Zahlen und der Theorie der Gleichverteilung (siehe Kapitel 2.2, Seite 7) stellt der folgende wichtige Satz her. Erstmals bewiesen wurde er von D.D. Wall [153] im Jahr 1949. Der hier gegebene Beweis folgt dem bei Niven [101, S. 110] angeführten, den Wolfgang Schmidt [126] für den *most accessible proof* hält.

Satz 2.4.1 *Eine reelle Zahl a ist normal zur Basis β genau dann, wenn die Folge*

$$a,\ \beta a,\ \beta^2 a,\ \ldots$$

gleichverteilt modulo 1 ist.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dass die Folge $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 sei. Die reelle Zahl a habe zur Basis β die Ziffernentwicklung

$$a = \lfloor a \rfloor + 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

und $B_k = b_1 b_2 \ldots b_k$ sei ein beliebiger k-stelliger Ziffernblock. Wir müssen zeigen, dass B_k in $.a_1 a_2 a_3 \ldots$ mit einer asymptotischen relativen Häufigkeit von β^{-k} auftritt. Wir beizeichnen mit I das Intervall

$$\{y \in \mathbb{R} \mid .b_1 b_2 \ldots b_k < y < \beta^{-k} + .b_1 b_2 \ldots b_k\}.$$

Das Intervall I hat Länge β^{-k}, und jede Zahl in I beginnt mit den Ziffern $.b_1 b_2 \ldots b_k$, also mit B_k. Falls also der Bruchteil $\{\beta^k a\}$ einer Zahl $\beta^k a$ mit den Ziffern $b_1 b_2 \ldots b_k$ beginnt, dann liegt $\{\beta^k a\}$ im Intervall I. Am Rand von I kann $\{\beta^k a\}$ nicht liegen, da sonst die Annahme der Gleichverteilung modulo 1 der Folge $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ verletzt wäre. Aus der Definition der Gleichverteilung ergibt sich sofort, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(I)}{n} = \beta^{-k}$$

gilt. Dabei bezeichnet $n(I)$ die Anzahl der Punkte
$\{a\}, \{\beta a\}, \{\beta^2 a\}, \ldots, \{\beta^{n-1} a\}$, die im Intervall I liegen. Also ist a normal zur Basis β.

Sei nun umgekehrt a normal zur Basis β. Für eine beliebige natürliche Zahl m unterteilen wir das Einheitsintervall in β^m abgeschlossene Teilintervalle der Form

$$[0, \beta^{-m}],\ [\beta^{-m}, 2\beta^{-m}],\ \ldots,\ [1 - \beta^{-m}, 1]. \tag{2.19}$$

Da a normal ist, muss $\{\beta^k a\}$ für jede natürliche Zahl k irrational sein und kann daher nicht am Rand eines dieser Intervalle liegen. Aus der Normalität von a folgt, dass (siehe Definition 2, Seite 12) $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ einfach normal zur Basis β^m sind, und daher die Punkte $\{a\}, \{\beta a\}, \{\beta^2 a\}, \ldots$ mit gleichen asymptotischen relativen Häufigkeiten in diesen Intervallen liegen. Bezeichne R eines dieser Intervalle und $n(R)$ die Anzahl der Punkte $\{a\}, \{\beta a\}, \ldots, \{\beta^{n-1} a\}$, die in R liegen, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(R)}{n} = \beta^{-m} \tag{2.20}$$

Bezeichne nun I ein Teilintervall von $[0, 1]$ der Form (μ, ν) mit $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, wobei nicht festgelegt wird, ob die Zahlen μ und ν zu I gehören oder nicht (ob also I offen, halboffen oder abgeschlossen ist). R_1 bezeichne die Vereinigung aller Intervalle aus (2.19), die zur Gänze in I liegen. Die Länge von R_1 beträgt daher zumindest $\nu - \mu - 2\beta^{-m}$. Sei nun ein beliebiges $\epsilon > 0$ gegeben, dann sehen wir aus (2.20) dass für genügend großes n

$$\frac{n(I)}{n} \geq \frac{n(R_1)}{n} \geq \nu - \mu - 2\beta^{-m} - \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Wählen wir m groß genug, so dass $\beta^{-m} < \epsilon/4$ ist, dann können wir

$$\frac{n(I)}{n} \geq \nu - \mu - \epsilon$$

für hinreichend großes n schließen.

Wenn wir in gleicher Weise mit R_2 die Vereinigung jener Intervalle aus (2.19) bezeichnen, die mit I nichtleeren Schnitt haben, dann ist die Länge von R_2 kleiner als $\nu - \mu + 2\beta^{-m}$. Daraus können wir schließen, dass

$$\frac{n(I)}{n} \leq \frac{n(R_2)}{n} \leq \nu - \mu + 2\beta^{-m} + \frac{\epsilon}{2} \leq \nu - \mu + \epsilon$$

für hinreichend großes m und n ist. Da wir ϵ beliebig klein wählen können, muss

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(I)}{n} = \nu - \mu$$

sein und der Satz ist bewiesen. $\square$

Daraus können wir sofort folgende Proposition ableiten:

Proposition 2.4.1 *Sei a normal zur Basis β. Dann ist für jede natürliche Zahl $k \neq 0$ auch ka normal zur Basis β.*

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz und dem Weyl'schen Kriterium. $\square$

Ebenfalls sofort zu sehen ist folgendes:

Proposition 2.4.2 *Sei a normal zur Basis β. Dann ist auch $-a$ normal zur Basis β.*

Beweis: Mit einer Folge ω ist auch die Folge $-\omega$ gleichverteilt modulo 1, wie anschaulich klar ist und sich auch formal einfach zeigen läßt. Aus dem vorigen Satz folgt damit sofort die Behauptung. $\square$

Eine Verfeinerung des vorigen Satzes bietet das folgende Lemma von D. Sherwell [131]:

Lemma 2.4.1 *Sei eine reelle Zahl a gegeben in der Form*

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} b_i, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \geq 0, \quad a = a_n + r_n,$$

wobei a_n die n-te Partialsumme und r_n den zugehörigen n-ten Rest bezeichne. Sei zusätzlich $\lim_{n\to\infty} \beta^n r_n = 0$. Dann ist die Folge der Bruchteile $\{\beta^n a_n\}$ gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn a normal zur Basis β ist.

Beweis: Es gilt $\{\beta^n a\} = \{\beta^n a_n + \beta^n r_n\}$ und daher

$$\begin{aligned} & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h \beta^n a} \\ = \; & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Big(e^{2\pi i h \beta^n a_n} (e^{2\pi i h \beta^n r_n} - 1) \Big) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h \beta^n a_n} \end{aligned} \tag{2.21}$$

für alle $h \in \mathbb{N}, h \neq 0$. Sei nun a normal zur Basis β. Dann ist die Folge $\{\beta^n a\}$ gleichverteilt modulo 1, und daher die linke Seite der Gleichung (2.21) gleich Null. Mit $\beta^n r_n \to 0$ gilt auch $e^{2\pi i h \beta^n r_n} - 1 \to 0$, daher ist auch der erste Term auf der rechten Seite von (2.21) gleich Null (siehe E. Hlawka [52, Hilfssatz 1, S.17]). Daraus folgt mit dem Weyl'schen Kriterium, dass auch die Folge $\{\beta^n a_n\}$ gleichverteilt modulo 1 ist.

Sei nun umgekehrt die Folge $\{\beta^n a_n\}$ gleichverteilt modulo 1. Dann folgt aus dem soeben erwähnten Hilfssatz und dem Weyl'schen Kriterium, dass die rechte und somit auch die linke Seite der Gleichung (2.21) gleich Null ist. Aus dem Weyl'schen Kriterium und dem vorhergehenden Satz folgt nun, dass a normal zur Basis β ist. $\square$

Die folgenden Überlegungen stammen vom Autor selbst:

Gegeben seien eine beliebige Basis $\beta \geq 2$, eine zu dieser Basis normale Zahl a sowie eine ganze Zahl $M > 1$. Wir wollen zeigen, dass auch $\frac{a}{M}$ normal zur Basis β ist.

Sei eine Primzahl p ein Teiler der Basis $\beta \geq 2$. Mit a ist selbstverständlich auch $\frac{a}{\beta}$ normal, und daher laut Proposition 2.4.1 auch $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\beta}{p} = \frac{a}{p}$. Es genügt also, jene M zu betrachten, für die $ggT(M, \beta) = 1$ erfüllt ist. Das sind jene Zahlen M, für welche die Darstellung von $\frac{1}{M}$ als Kommazahl zur Basis β periodisch ohne Vorperiode ist.

Normalität zur Basis β ist äquivalent zu Normalität zur Basis β^k mit beliebigem natürlichem $k \geq 1$ (siehe Satz 5.1.1, Seite 64). Wenn $1/M$ bezüglich einer Basis β periodisch mit Periodenlänge $k \geq 1$ ist, dann ist $1/M$ bezüglich Basis β^k periodisch mit Periodenlänge 1. Wir können daher oBdA. annehmen, dass $1/M$ Periodenlänge 1 hat, also von der Form

$$1/M = 0.mmmm\ldots$$

ist, wobei m eine einzelne Ziffer zur Basis β bezeichnet. Für die folgenden Zeilen verwenden wir folgende Notaton: mm soll hier nicht das Produkt $m \cdot m$ bezeichnen, sondern die Basis-β-Zahl $mm = \beta m + m$. Gleiches gelte für $mmm = \beta^2 m + \beta m + m$ etc.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
b_1 &= (0.\ m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a \\
b_2 &= (0.\ 0\ 0\ m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a \\
b_3 &= (0.\ 0\ 0\ 0\ 0\ m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a \\
&\vdots \\
b_n &= (0.\underbrace{0\ldots0}_{2n-2}\ m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a = mm\ \beta^{-2n}\ a \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (0.mmmmm\ldots)\ a = \frac{1}{M}a$$

Es ergibt sich

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} b_j = 0.\underbrace{m\ldots m}_{2n}000\ldots\ a = \underbrace{m\ldots m}_{2n}\ \beta^{-2n}\ a$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
a_1 &= (0.m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a \\
a_2 &= (0.m\ m\ m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a \\
a_3 &= (0.m\ m\ m\ m\ m\ m\ 0\ 0\ 0\ldots)\ a \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und

$$r_n = 0.(\underbrace{0\ldots0}_{2n}m\ m\ m\ldots)\ a = \frac{1}{M}\ \beta^{-2n}\ a < \beta^{-2n}\ a$$

Daher ist $\beta^n r_n < \beta^{-2n+n}\ a = \beta^{-n}\ a$, und somit gilt $\beta^n r_n \to 0$ für $n \to \infty$, womit die erste Bedingung des obigen Lemmas 2.4.1 erfüllt ist.

Die Folge $\omega(n) = \beta a_1, \beta^2 a_2, \beta^3 a_3, \ldots$ hat die Form

$$(m.m000\ldots)\ a,\ (mm.mm000\ldots)\ a,\ (mmm.mmm000\ldots)\ a, \ldots$$

Die Differenzenfolgen $\omega(n+q) - \omega(n)$ für natürliche Zahlen $q \geq 1$ haben daher folgende Form:

$$\begin{aligned}
& q = 1: \\
& (m0.0m000\ldots)\, a,\ (m00.00m000\ldots)\, a,\ (m000.000m\ldots)\, a,\ \ldots \\
= \ & \beta^1\ m\ a,\ \beta^2\ m\ a,\ \beta^3\ m\ a,\ \ldots \\
+ \ & \beta^{-2}\ m\ a,\ \beta^{-3}\ m\ a,\ \beta^{-4}\ m\ a,\ \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q = 2: \\
& (mm0.0mm000\ldots)\, a,\ (mm00.00mm000\ldots)\, a,\ (mm000.000mm000\ldots)\, a, \ldots \\
= \ & \beta^1\ mm\ a, \beta^2\ mm\ a,\ \beta^3\ mm\ a,\ \ldots \\
+ \ & \beta^{-3}\ mm\ a, \beta^{-4}\ mm\ a,\ \beta^{-5}\ mm\ a,\ \ldots
\end{aligned}$$

$\vdots$

Dabei ist in diesen Summen von zwei Folgen die jeweils erste Folge gleichverteilt modulo 1, weil mit a auch die Zahlen $m\ a$, $mm\ a$ etc. normal zur Basis β sind (siehe Proposition 2.4.1). Die jeweils zweite Folge ist konvergent, und da die Summe eine gleichverteilten und einer konvergenten Folge ebenfalls gleichverteilt modulo 1 ist (siehe Hlawka [52, Eigenschaft 3, S. 18]), sind die Folgen $\omega(n+q) - \omega(n)$ gleichverteilt modulo 1 für alle ganzen Zahlen $q \geq 1$.
Damit ergibt sich aus dem Hauptsatz der Theorie der Gleichverteilung (Hlawka [52, S. 31]), dass die Folge $\omega(n) = \beta a_1, \beta^2 a_2, \beta^3 a_3, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 sein muss.

Diese Folge ist, wie wir in Lemma 2.4.1 gesehen haben, gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn die Zahl

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \frac{a}{M}$$

normal zur Basis β ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Gemeinsam mit Proposition 2.4.1 ergibt sich nun folgende Aussage:

Proposition 2.4.3 *Gegeben seien eine zu einer Basis β normale Zahl a und eine rationale Zahl $p \neq 0$. Dann ist auch pa normal zur Basis β.*

Sei nun eine rationale Zahl q gegeben, und a sei wieder normal zur Basis β. Für $q \neq 0$ ist mit a auch $q^{-1}a$ normal zur Basis β, ebenso natürlich $q^{-1}a + 1$ und daher auch $q(q^{-1}a + 1) = a + q$. Für $q = 0$ ist $a + q$ trivialerweise normal.

Wir erhalten insgesamt also folgenden Satz:

Satz 2.4.2 *Sei eine reelle Zahl a normal zur Basis β. Dann sind auch alle Zahlen der Form $pa + q$ für $p, q \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$ normal zur Basis β.*

Dieses Resultat stammt von J.E. Maxfield [84]. Andere Beweise dieses Satzes finden sich etwa bei K.T. Chang [24] oder K. Nagasaka und C. Batut [93]. Eine Verallgemeinerung liefert B. Volkmann [150].

Die folgende Überlegung stammt ebenfalls vom Autor selbst, ergibt aber auch nur ein bereits bekanntes Resultat:

Die Champernowne-Zahl $C_1 = 0.123456789101112\ldots$ ist, wie in Kapitel 4.1 gezeigt wird, normal zur Basis 10. Auch eine leicht modifizierte Version dieser Zahl,

$$C_2 = 0.0\,12345678\,0\,910111213\ldots9798\,0\,99100101102\ldots997998\,0\,999100010011002\ldots$$

die aus der Champernowne-Zahl entsteht, wenn gleich zu Beginn und dann jeweils vor dem ersten Auftreten der Ziffernblöcke "9", "99", "999" etc jeweils eine einzelne "0" eingeschoben wird, ist, wie sich leicht zeigen läßt, normal zur Basis 10, und damit gilt dasselbe auch für $-C_2$ (siehe Proposition 2.4.2).

Nun ist

$$\begin{aligned} & C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2) \\ = \; & 0.11111111101\ldots0101001001\ldots00100100010001\ldots0001000100010001\ldots, \end{aligned}$$

eine Zahl, deren Kommastellen ausschließlich aus den Ziffern "0" und "1" gebildet werden, und die somit nicht normal zur Basis 10 ist. Damit ist durch Angabe eines Beispiels folgende, wenig überraschende Proposition gezeigt:

Proposition 2.4.4 *Die Summe normaler Zahlen ist (auch im nichttrivialen Fall) im Allgemeinen nicht normal.*

Das Wort "nichttrivial" schließe dabei etwa Summen der Form $a + b$ mit $b = -a$ oder $b = -a + 1$ etc. aus, die selbstverständlich keine normale Zahlen ergeben.

Bereits J.E. Maxfield [85] hat erkannt, dass die Menge der zu einer Basis β normalen Zahlen nicht abgeschlossen bezüglich der Addition ist. Er zeigte dies indem er feststellte, dass die Summe einer normalen Zahl a und der damit ebenfalls normalen Zahl $-a$ Null ergibt, somit die Summe zweier normaler Zahlen eine nicht-normale Zahl ergibt.
Weiters bewies er, dass sich jede Zahl als Summe und jede Zahl außer Null als Produkt von zwei normalen Zahlen auf mindestens eine Weise darstellen läßt (Beweis siehe Maxfield [85]). Daraus folgt sofort, dass die Menge der zu einer Basis β normalen Zahlen auch nicht abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist.

In diesem Zusammenhang von Interesse ist auch ein Artikel von G. Wagner [151], der Ringe R reeller Zahlen konstruierte, welche folgende Bedingungen erfüllen (dabei ist $\beta \geq 2$ eine ganze Zahl und p eine ungerade Primzahl, die β nicht teilt):

- R ist überabzählbar
- alle Zahlen $a \in R, a \neq 0$ sind normal zur Basis β
- alle Zahlen $a \in R$ sind nicht-normal zur Basis $p\beta$.

2.5 Die Weyl'sche Ungleichung

In diesem Kapitel werden wir eine Ungleichung beweisen, die wir mehrmals benötigen werden. Die Weyl'sche Ungleichung (*Weyl's inequality*) liefert eine Abschätzung für trigonometrische Summen, deren Bezug zu normalen Zahlen wir über das Weyl'sche Kriterium in den Kapiteln 2.2 und 2.4 hergestellt haben. Unser Beweis folgt dem bei M. Drmota und R.F. Tichy [37] gegebenen.

Definition 2.5.1 *Sei $\Phi(x)$ eine reellwertige Funktion. Dann bezeichnen Δ_1 bzw. Δ_j den einfachen bzw. iterierten Differenzenoperator. Es sei also*

$$\Delta_1(\Phi(x); y) = \Phi(x+y) - \Phi(x)$$

und

$$\Delta_{j+1}(\Phi(x); y_1, y_2, \ldots, y_{j+1}) = \Delta_1(\Delta_j(\Phi(x); y_1, \ldots, y_j); y_{j+1})$$

Lemma 2.5.1 *Sei*

$$T(\Phi) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \Phi(n)},$$

wobei Φ eine beliebige arithmetische Funktion sei. Dann ist für jede feste natürliche Zahl $j \geq 1$

$$|T(\Phi)|^{2^j} \leq (2N)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1|<N} \sum_{|h_2|<N} \cdots \sum_{|h_j|<N} |T_j| \tag{2.22}$$

mit

$$T_j = \sum_{n \in I_j} e^{2\pi i \Delta_j(\Phi(n); h_1, \ldots, h_j)}.$$

Zusätzlich erfüllen die (möglicherweise leeren) Intervalle $I_j = I_j(h_1, \ldots, h_j)$ die Bedingungen

$$I_1(h_1) \subset [1, N] \quad \text{und} \quad I_j(h_1, \ldots, h_j) \subset I_{j-1}(h_1, \ldots, h_{j-1}).$$

Beweis: Wir beweisen das Lemma durch Induktion über j. Zur Abkürzung schreiben wir $\Delta_j(x)$ für $\Delta_j(\Phi(x); h_1, \ldots, h_j)$. Es ist

$$\begin{aligned} |T(\Phi)|^2 &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{h_1=1-n}^{N-n} e^{2\pi i \Delta_1(n)} \\ &= \sum_{h_1=1-N}^{N-1} \sum_{n \in I_1} e^{2\pi i \Delta_1(n)} \end{aligned}$$

mit $I_1 = [1, N] \cap [1 - h_1, N - h_1]$.

Wenn nun die für ein festes j Ungleichung (2.22) erfüllt ist, dann gilt nach der Cauchy'schen Ungleichung

$$|T(\Phi)|^{2^{j+1}} \leq (2N)^{2^{j+1}-2j-2} (2N)^j \sum_{h_1,\ldots,h_j} |T_j|^2$$

und daher auch

$$|T_j|^2 = \sum_{|h|<N} \sum_{n \in I_{j+1}} e^{2\pi i (\Delta_j(n+h) - \Delta_j(n))}$$

mit $I_{j+1} = I_j \cap \{n : n + h \in I_j\}$. Damit ist das Lemma gezeigt. □

Lemma 2.5.2 *Seien X, Y und a reelle Zahlen mit $X \geq 1, Y \geq 1$ und $|a - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ für ganzzahlige p und q mit $ggT(p, q) = 1$. Dann gilt*

$$\sum_{n \leq X} \min\Big(\frac{XY}{n}, \frac{1}{\|an\|}\Big) \ll XY\Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{Y} + \frac{q}{XY}\Big) \log(2Xq)$$

wobei $\|y\| = \min_{z \in \mathbb{Z}} |y - z|$ bedeutet.

Beweis: Bezeichne S die Summe auf der linken Seite der Ungleichung. Dann gilt

$$S \leq \sum_{0 \leq j \leq \frac{X}{q}} \sum_{r=1}^{q} \min\left(\frac{XY}{qj + r}, \frac{1}{\|a(qj + r)\|}\right).$$

Für jedes j bezeichne $y_j = \lfloor ajq^2 \rfloor$ und $\theta = q^2 a - aq$. Dann ist

$$a(qj + r) = \frac{y_j + ar}{q} + \frac{\{ajq^2\}}{q} + \frac{\theta r}{q^2}.$$

Wenn $j = 0$ ist und $r \leq \frac{q}{2}$, dann gilt

$$\|a(qj + r)\| \geq \left\|\frac{ar}{q}\right\| - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2}\left\|\frac{pr}{q}\right\|.$$

Weiters existieren für jedes j höchstens $\mathcal{O}(1)$ Werte für r, welche

$$\|a(qj+r)\| \geq \frac{1}{2}\left\|\frac{y_j+pr}{q}\right\|$$

nicht erfüllen, und außerdem ist $qj+r \gg q(j+1)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
S &\ll \sum_{1\leq r\leq \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\frac{pr}{q}\|} + \sum_{0\leq j\leq \frac{X}{q}} \left(\frac{XY}{q(j+1)} + \sum_{1\leq r\leq q,\ \frac{y_j+pr}{q}\notin\mathbb{Z}} \frac{1}{\|(y_j+pr)/q\|}\right)\\
&\ll \frac{XY}{q}\sum_{0\leq j\leq X}\frac{1}{j+1} + \left(\frac{X}{q}+1\right)\sum_{0\leq h\leq q/2}\frac{q}{h}\\
&\ll XY\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{Y}+\frac{q}{XY}\right)\log(2Xq).
\end{aligned}$$

Somit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Lemma 2.5.3 *Sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante $C(\epsilon) > 0$, so dass für jedes $h \in \mathbb{N}$ die Ungleichung*

$$\#\{(h_1,\ldots,h_k)\in\mathbb{N}^k:\ h_1\ldots h_k = h\} \leq C(\epsilon)h^\epsilon$$

gilt.

Beweis: Wir setzen $B = 2^{2(k-1)/\epsilon}$. Dann gilt für jedes $p \geq B$ und $b \geq 1$

$$2^{b+k+1} \leq p^{\epsilon b}.$$

Weiters existiert eine Konstante $C \geq 0$, so dass für alle Mengen J von ganzen Zahlen mit $2 \leq \min J \leq \max J \leq B$ und beliebige natürliche Zahlen $b_j, j \in J$

$$\prod_{j\in J}\binom{b_j+k-1}{k-1} \leq C\prod_{j\in J} j^{\epsilon b_j}$$

gilt. Wenn h eine natürliche Zahl der Form

$$h = p_1^{e_1}\ldots p_r^{e_r}$$

mit verschiedenen Primzahlen $p_1,\ldots,p_r$ und $e_j \geq 1$ für $1 \leq j \leq r$ ist, dann wird die Gleichung

$$\#\{(h_1,\ldots,h_k)\in\mathbb{N}^k:\ h_1\ldots h_k = h\} = \prod_{j=1}^{r}\binom{e_j+k-1}{k-1}$$

erfüllt. Aus

$$\prod_{p_j<B} \binom{e_j+k-1}{k-1} \leq C \prod_{p_j<B} p_j^{\epsilon e_j}$$

und

$$\prod_{p_j \geq B} \binom{e_j+k-1}{k-1} \leq \prod_{p_j \geq B} 2^{e_j+k-1} \leq \prod_{p_j \geq B} p_j^{\epsilon e_j}$$

folgt nun die Behauptung und das Lemma ist bewiesen. □

Satz 2.5.1 (Weyl'sche Ungleichung) *Gegeben seien eine reelle Zahl a sowie ganze Zahlen p, q mit $ggT(p,q) = 1$, welche*

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

erfüllen. Weiters sei $\Phi(x)$ ein Polynom der Form

$$\Phi(x) = ax^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + +\alpha_{k-1} x + \alpha_k.$$

mit Führungskoeffizienten a. Dann gilt für

$$T(\Phi) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \Phi(n)}$$

die Abschätzung

$$T(\Phi) \ll N^{1+\epsilon} \Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} + \frac{q}{N^k} \Big)^{\frac{1}{K}},$$

wobei $\epsilon > 0$ eine beliebige reelle Konstante und $K = 2^{k-1}$ ist.

Beweis: Wir wenden Lemma 2.5.1 für den Fall $j = k-1$ an. Für

$$\Phi(x) = ax^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$$

ist

$$\Delta_{k-1}(\Phi(x); h_1, \ldots, h_{k-1}) = k! a \bigg(x + \frac{1}{2} h_1 + \cdots + \frac{1}{2} h_{k-1} \bigg) + (k-1)! \alpha_1.$$

Daher gilt

$$|T(\Phi)|^K \leq (2N)^{K-k} \sum_{|h_1| \leq N} \cdots \sum_{|h_{k-1}| \leq N} \sum_{n \in I_{k-1}} e^{2\pi i (h_1 \ldots h_{k-1} p_{k-1}(n; h_1, \ldots, h_{k-1}))}$$

mit $p_{k-1}(x; h_1, \dots, h_{k-1}) = k!a(x + \frac{1}{2}h_1 + \cdots + \frac{1}{2}h_{k-1}) + (k-1)!\alpha_1$. Die Terme mit $h_1, \dots, h_{k-1} = 0$ liefern höchstens $\ll N^{k-1}$, alle restlichen sind von der Form

$$\sum_{n \in I} e^{2\pi i(han+b)}$$

wobei h mit $|h| \leq k!N^{k-1}$ eine ganze Zahl ungleich 0, b eine reelle Zahl und I ein Intervall bezeichnen. Durch Gebrauch der Abschätzung

$$\left| \sum_{n \in I} e^{2\pi i(han+b)} \right| \ll \frac{1}{\|ha\|}$$

und mit Anwendung von Lemma 2.5.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} |T(\Phi)|^K &\ll (2N)^{K-k} \left(N^{k-1} + N^{\epsilon} \sum_{h=1}^{k!N^{k-1}} \min(N, \|ah\|^{-1}) \right) \\ &\ll N^{K-k+\epsilon} \left(N^{k-1} \sum_{h=1}^{k!N^{k-1}} \min(N^k h^{-1}, \|ah\|^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Dies ist laut Lemma 2.5.2 für $q \leq N^k$

$$\ll N^{K+2\epsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} + \frac{q}{N^k} \right),$$

womit der Satz bewiesen ist, da die Behauptung für $q > N^k$ trivialerweise zutrifft. $\square$

Kapitel 3

Wie viele normale Zahlen gibt es?

3.1 Fast alle reellen Zahlen sind absolut normal

Nachdem man einmal den Begriff "normale Zahl" definiert hat, stellt sich natürlich sofort die Frage, wieviele solcher Zahlen es gibt. Darauf konnte bald Antwort gegeben werden: viele (oder, um mit S. Wagon [152] zu sprechen: *there are lots of normal numbers*). Es sind sogar fast alle Zahlen absolut normal.
Dennoch ist es ein sehr schwieriges Problem, normale oder gar absolut normale Zahlen zu konstruieren oder explizit anzugeben.
Ebenfalls sehr schwierig ist die Frage nach der Normalität bestimmter Zahlen, z.B. $\pi, \sqrt{2}$ oder e. Ein Algorithmus, mit dem allgemein die Frage nach der Normalität einer beliebigen Zahl zu beantworten wäre ist derzeit nicht bekannt (siehe dazu Kapitel 4, S. 40 und Kapitel 7, S. 101). Oder, mit den Worten von C. Kraiikamp und H. Nakada [70]: *Given an integer base β, it is already very difficult - if not impossible by the present methods - to determine whether a number is normal in that base or not.*

Bereits E. Borel konnte mit maßtheoretischen Methoden und unter Zuhilfenahme des Lemmas von Borel-Cantelli beweisen, dass fast alle Zahlen absolut normal sind (in dem Sinn, dass die Menge aller nicht-normalen Zahlen Lebesgue-Maß 0 hat). Wir werden dasselbe Ergebnis hier auf das Weyl'sche Kriterium zurückführen (vgl. Kapitel 2.2.1, S. 9) und folgen dabei der Vorgehensweise von L. Kuipers und H. Niederreiter [71, S. 32-33].

Für den Beweis des folgenden Satzes verwenden wir das Lemma von Fatou, das hier nicht bewiesen werden soll. Für einen Beweis desselben siehe etwa J. Elstrodt [41].

Satz 3.1.1 *Sei ω eine Folge verschiedener ganzer Zahlen. Dann ist die Folge $x \cdot \omega$ gleichverteilt modulo 1 für fast alle reellen Zahlen x.*

Beweis: Für alle ganzen Zahlen k ist mit der Folge $x \cdot \omega$ auch die Folge $x \cdot \omega + k$ gleichverteilt modulo 1. Daher genügt es unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, zu zeigen, dass $x \cdot \omega$ gleichverteilt modulo 1 für fast alle $x \in [0,1)$ ist.

Für eine feste ganze Zahl $h \neq 0$ definieren wir

$$S(N,x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h \omega(n) x} \quad \text{für} \quad N \geq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq x < 1.$$

Dann ist

$$|S(N,x)|^2 = S(N,x)\overline{S(N,x)} = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^{N} e^{2\pi i h(\omega(m)-\omega(n))x}$$

und daher

$$\int_0^1 |S(N,x)|^2 \, dx = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^{N} \int_0^1 e^{2\pi i h(\omega(m)-\omega(n))x} \, dx$$

Da die einzigen nichtverschwindenden Beiträge zur letztgenannten Doppelsumme von den Termen mit $n = m$ stammen folgt die Gleichung

$$\int_0^1 |S(N,x)|^2 \, dx = \frac{1}{N}$$

und daraus

$$\sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 |S(N^2,x)|^2 \, dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int_0^1 \sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2,x)|^2 \, dx < \infty$$

und dass daher

$$\sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2,x)|^2 < \infty$$

für fast alle $x \in [0,1)$ gelten muss.

Daher muss auch

$$\lim_{N \to \infty} S(N^2,x) = 0$$

für fast alle $x \in [0,1)$ gelten.

Zu jedem festen $N \geq 1$ muss es ein m mit $m^2 \leq N < (m+1)^2$ geben, woraus durch einfache Abschätzungen

$$|S(N,x)| \leq |S(m^2,x)| + \frac{2m}{N} \leq |S(m^2,x)| + \frac{2}{\sqrt{N}}$$

folgt. Daher muss

$$\lim_{N\to\infty} S(N,x) = 0$$

für fast alle $x \in [0,1)$ sein, wobei die Ausnahmemenge von der anfangs gewählten Zahl h abhängt. Wenn wir nun die Vereinigung all der Ausnahmemengen zu $h = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ bilden, erhalten wir eine Nullmenge B. Da nun

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h \omega(n) x} = \lim_{N\to\infty} S(N,x) = 0$$

für alle $x \in [0,1)\backslash B$ und alle natürlichen Zahlen $h \neq 0$ ist, ergibt sich mithilfe des Weyl'schen Kriteriums, dass die Folge $x \cdot \omega$ für fast alle $x \in [0,1)$ und daher auch für fast alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gleichverteilt modulo 1 sein muss. $\square$

Wir wählen nun als Folge ω die durch $\omega(n) = \beta^n$ für eine natürliche Zahl $\beta \geq 2$ gegebene Folge. Dann gilt für fast alle reellen Zahlen x, dass die Folge $\beta x, \beta^2 x, \beta^3 x, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 und daher (vgl. Kapitel 2.4, Seite 22) die Zahl x normal zur Basis β ist. Zu einer festen Basis β sind also fast alle reellen Zahlen normal.

Da es nur abzählbar viele mögliche Basen β gibt folgt auch sofort folgender Satz:

Satz 3.1.2 *Fast alle reellen Zahlen sind absolut normal.*

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf andere Weise zeigen bzw. interpretieren. Für eine ergodentheoretische Deutung siehe etwa P. Billingsley [11, S. 15] oder die Diplomarbeit von P.J. Grabner [46], für eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation beispielsweise J. Elstrodt [41, S. 143]. S. Ducray [38] legt dar, wie man obiges Resultat als Spezialfall des allgemeineren und erst später entdeckten (siehe A. Kolmogoroff [64]) starken Gesetzes der großen Zahlen auffassen kann. Ein anderer, weitestgehend auf Maßtheorie verzichtender Beweis findet sich bei R. Nillsen [100].

3.2 Es gibt überabzählbar viele nicht-normale Zahlen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass fast alle Zahlen absolut normal sind. Die Menge der nicht-normalen Zahlen hat also Lebesgue-Maß 0. Dennnoch gibt es überabzählbar viele nicht-normale Zahlen, wie die folgenden Beispiele zeigen werden:

Beispiel 3.2.1 *Wir wählen eine feste Basis $\beta \geq 3$. Dann ist die Menge aller Zahlen der Form*

$$a = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots \quad mit \quad a_i \in \{0,1\}$$

überabzählbar. Alle diese Zahlen sind nicht normal zur Basis β, da keine dieser Zahlen die Ziffer "2" auch nur ein einziges mal enthält.

Beispiel 3.2.2 (Cantor'sches Diskontinuum) *Sei unsere Basis $\beta = 3$. Wir betrachten nun die Menge aller Zahlen der Form*

$$a = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots \quad mit \quad a_i \in \{0,2\}.$$

Diese Menge entspricht dem bekannten Cantor'schen Diskontinuum, dem wohl berühmtesten Beispiel eine überabzählbaren Menge mit Lebesgue-Maß 0. Keine einzige in dieser Menge enthaltene Zahl ist einfach normal zur Basis 3, da keine dieser Zahlen die Ziffer "1" auch nur ein einziges Mal enthält. Daher ist auch keine dieser Zahlen normal zur Basis 3.

Beispiel 3.2.3 *Sei unsere Basis $\beta = 2$. Wir betrachten die (überabzählbare) Menge aller Zahlen der Form*

$$a = 0.00a_100a_200a_300a_4\ldots \quad mit \quad a_i \in \{0,1\}.$$

Für alle diese Zahlen ist die asymptotische relative Häufigkeit des Auftretens der Ziffer "0" mindestens $\frac{2}{3}$. Daher ist keine dieser Zahlen einfach normal zur Basis 2, und insbesondere auch keine dieser Zahlen normal zur Basis 2.

Wir haben damit zu jeder Basis $\beta \geq 2$ eine überabzählbare Menge von Zahlen angegeben, die nicht normal zu dieser Basis β sind. Insbesondere ist die Menge aller nicht absolut normalen Zahlen, welche jede der oben angegebenen Mengen umfasst, überabzählbar.

3.3 Einfach normale Zahlen bilden eine magere Menge

Als "magere Menge" bzw. "Menge von 1. (Baire-)Kategorie" wird die höchstens abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen bezeichnet. Nirgends dichte Mengen sind solche, deren Abschluß keine inneren Punkte enthält. Magere Mengen sind aus topologischer Sicht klein. Beispielsweise bilden die rationalen Zahlen oder das Cantor'sche Diskontinuum magere Mengen.

Wir behaupten nun den folgenden Satz:

Satz 3.3.1 *Die zu einer festen Basis β einfach normalen Zahlen bilden eine magere Menge.*

Dieses Resultat stammt von T. Šalát [121] (siehe auch F. Schweiger und T. Šalát [130]). Wir folgen hier dem bedeutend übersichtlicheren, bei E. Hlawka [52, S. 77] angeführten Beweis.

Beweis: Sei a eine beliebige reelle Zahl der Form $\lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\ldots$ bezüglich einer festen Basis β. In Übereinstimmung mit der Notation aus Kapitel 2.1 bezeichnen wir mit $N(0, A_n)$ die Anzahl jener $j \leq n$ mit $a_j = 0$. Mit $M(N_0)$ bezeichnen wir jene Menge, die alle a mit

$$\left| \frac{N(0, A_n)}{n} - \frac{1}{\beta} \right| < \frac{1}{2\beta} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_0$$

enthält. Da für jede einfach normale Zahl a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(0, A_n)}{n} = \frac{1}{\beta}$$

gilt, muss jede einfach normale Zahl für ein passendes $N_0 \in \mathbb{N}$ in der zugehörigen Menge $M(N_0)$ liegen und daher der Vereinigung all dieser Mengen angehören.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass jede dieser Mengen $M(N_0)$ nirgends dicht ist. Falls für ein festes $N_0 \in \mathbb{N}$ der Abschluss der Menge $M(N_0)$ einen inneren Punkt, damit eine offene nichtleere Menge und infolgedessen ein offenes Intervall enthielte, läge darin eine Zahl der Form k/β^l für passendes $k \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{N}$.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gäbe es damit ein $a = \lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\ldots \in M(N_0)$ mit

$$\left| a - \frac{k}{\beta^l} \right| < \frac{1}{\beta^n}.$$

Es müssten daher alle Ziffern $a_{l+1}, ..., a_n$ von a entweder ausnahmslos gleich 0 oder ausnahmslos gleich $\beta - 1$ sein. Damit enthielten die ersten n Nachkommastellen von a entweder mindestens $l - n$ oder aber höchstens l mal die Ziffer "0", es wäre also entweder

$$\frac{N(0, A_n)}{n} > 1 - \frac{l}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{N(0, A_n)}{n} < \frac{l}{n}.$$

Da wir n beliebig groß wählen können ergäbe sich dadurch für ausreichend großes n, dass a unmöglich in $M(N_0)$ liegen kann, womit ein Widerspruch erreicht ist. Daher kann keine der Mengen $M(N_0)$ auch nur einen einzigen Punkt im Inneren enthalten, und die Behauptung des Satzes ist bewiesen. □

Da es nur endlich viele mögliche Basen gibt, folgt daraus auch sofort folgende

Proposition 3.3.1 *Die Menge aller Zahlen, die zu mindestens einer Basis einfach normal sind, ist mager.*

Insbesondere sind auch die Menge aller zu mindestens einer Basis normalen bzw. die Menge aller absolut normalen Zahlen mager. Umgekehrt ist die Menge aller Zahlen, die zu keiner einzigen Basis einfach normal sind, überabzählbar (dieses Resultat stammt von Maxfield [84]), denn diese Menge ist das Komplement der Menge aller zu mindestens einer Basis einfach normalen Zahlen, besitzt daher als Komplement einer mageren Menge die Mächtigkeit des Kontinuums und ist insbesondere überabzählbar.

Wie wir gesehen haben, gibt es also überabzählbar viele absolut normale Zahlen, und dennoch bilden die zu einer Basis β einfach normalen Zahlen "nur" eine magere Menge. E. Hlawka [52] quittiert dies mit der launigen Bemerkung

> "Während sich die normalen Zahlen dem Maßtheoretiker geradezu aufdrängen, kann sie der Topologe auf der Zahlengeraden übersehen, so dünn sind sie gestreut."

Kapitel 4

Konstruktion normaler Zahlen

E. Borel konnte bereits 1909 beweisen, dass fast alle Zahlen normal sind; ein Beispiel für eine normale Zahl blieb aber lange Zeit ausständig. W. Sierpiński [133] behauptet zwar

> "The first effective example of an absolutely normal number was given by me in the year 1916."

was aber auf seine, von der unseren abweichende Definition des Begriffs "absolut normal" zurückzuführen ist. Tatsächlich konstruierte er (siehe Sierpiński [132]) eine Zahl, die zu allen möglichen Basen $\beta \geq 2$ einfach normal ist. Dasselbe gilt für V. Becher und S. Figueira [8], die unlängst einen Algorithmus zur effektiven Berechnung der von Sierpiński konstruierten Zahl angaben.

4.1 Champernowne

Das erste explizite Beispiel einer normalen Zahl konnte D.G. Champernowne [23] im Jahr 1933 angeben. Er zeigte, dass die sogenannte "Champernowne-Zahl"

$$0.1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ ...$$

normal zur Basis 10 ist.

Um die Normalität dieser Zahl zu beweisen folgen wir der Vorgehensweise von I. Niven [101].

Satz 4.1.1 *Die Zahl*

$$x = 0.12345678910111213\ldots$$

ist normal zur Basis 10.

Beweis: Bezeichne X_n den Block, der aus den ersten n Ziffern der Champernowne-Zahl x besteht. Wir denken uns X_n in kleinere Blöcke unterteilt, entsprechend den natürlichen Zahlen, also

$$X_n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ ...\ , a_1 a_2 ... a_m,\ ... \tag{4.1}$$

Die letzte vollständig in dieser Unteilung von X_n enthaltene natürliche Zahl u habe die Ziffern $a_1a_2...a_m$, es sei also

$$u = a_1 10^{m-1} + a_2 10^{m-2} + \cdots + a_m \quad \text{mit} \quad a_1 \neq 0.$$

In (4.1) stehen maximal m Ziffern hinter dem letzten Komma, und da höchstens $u+1$ Blöcke vorkommen ergibt sich

$$n \leq m(u+1). \tag{4.2}$$

Wir definieren die Zahlen

$$u_j = \lfloor u 10^{-j} \rfloor = a_1 10^{m-1-j} + a_2 10^{m-2-j} + \cdots + a_{m-j} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Um die Häufigkeit des Erscheinens eines bestimmten Ziffernblocks $B_k = b_1 b_2 \ldots b_k$ abschätzen zu können, zählen wir nur die Häufigkeit des Vorkommens von B_k innerhalb eines der Blöcke von (4.1) und ignorieren solche Fälle, in denen B_k ein oder mehrere Kommas berührt oder überschreitet.

Wir suchen also nur Blöcke der Form

$$y_1 y_2 \ldots y_s b_1 b_2 \ldots b_k z_1 z_2 \ldots z_t = Y_s B_k Z_t. \tag{4.3}$$

Da in jedem Block in (4.1) höchstens m Ziffern auftreten, verlangen wir dass $s + k + t \leq m$ gilt. Darüber hinaus darf die in (4.3) gegebene Zahl nicht größer als u sein, was gewährleistet wird durch die Forderung, dass

$$y_1 10^{s-1} + y_2 10^{s-2} + \cdots + y_s < a_1 10^{m-k-t-1} + a_2 10^{m-k-t-2} + \cdots + a_{m-k-t} = u_{k+t}$$

ist.

Es gibt in (4.3) also $u_{k+t} - 1$ Möglichkeiten für die Zahl Y_s und 10^t Möglichkeiten für die t Ziffern von Z_t. Daher ist die Anzahl der Zahlen der Form (4.3), die in (4.1) gefunden werden können, mindestens gleich

$$\sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t (u_{k+t} - 1),$$

wobei der größtmögliche Wert für t sich durch Einsetzen von $s = 1$ in die Ungleichung $s + k + t \leq m$ als $t = m - k - 1$ ergibt.

Bezeichne nun $N(B_k, X_n)$ jene Anzahl, mit welcher der Ziffernblock B_k in (4.1) aufscheint, dann erhalten wir also

$$N(B_k, X_n) \geq \sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t(u_{k+t} - 1).$$

Es gilt $u_j > u10^{-j} - 1$ (wie man sofort aus der Definition der u_j ersieht), und daher ist

$$\begin{aligned} N(B_k, X_n) &> \sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t(u \cdot 10^{-k-t} - 2) \\ &= \sum_{t=0}^{m-k-1} u \cdot 10^{-k} - \sum_{t=0}^{m-k-1} 2 \cdot 10^t \\ &> (m-k)u \cdot 10^{-k} - 10^{m-k}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Indem man die linke Seite durch n, die rechte durch $m(u+1)$ dividiert, erhält man unter Berücksichtigung von (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} N(B_k, X_n) &> \frac{m-k}{m} \cdot \frac{u}{u+1} 10^{-k} - \frac{10^{m-k}}{u+1} \cdot \frac{1}{m} \\ &= 10^{-k} - 10^{-k}\Big(\frac{1}{u+1} + \frac{u}{u+1} \cdot \frac{k}{m}\Big) - \frac{10^{m-k}}{u+1} \cdot \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{10^{m-k}}{u+1} \leq \frac{10^{m-1}}{u+1} \leq \frac{u}{u+1} < 1.$$

und aus $n \to \infty$ folgt

$$u \to \infty, \quad m \to \infty, \quad \frac{k}{m} \to 0.$$

Daher können wir für jedes $\epsilon > 0$ ein genügend großes n wählen, so dass

$$\frac{1}{n} N(B_k, X_n) > 10^{-k} - \epsilon$$

und daher

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} N(B_k, X_n) \geq 10^{-k}$$

ist.

Da dies für alle 10^k möglichen k-stelligen Ziffernblöcke B_k gilt, muss laut Lemma 2.3.1 ingesamt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(B_k, X_n)}{n} = 10^{-k}$$

sein.

Damit ist die Champernowne-Zahl normal zur Basis 10 und die Behauptung bewiesen. □

Es kann gezeigt werden, dass die Champernowne-Zahl zwar normal zur Basis 10 und daher ebenfalls normal beispielsweise zu den Basen 100 und 1000 (siehe Kapitel 5.1), aber nicht normal zu manchen anderen Basen ist. Steinhaus hatte vermutet, dass Normalität, so wie etwa Irrationalität oder Transzendenz, eine Eigenschaft der Zahlen an sich sein könnte, unabhängig davon, in welcher Basis β diese Zahlen dargestellt werden. Damit wären die Eingenschaften "absolut normal" und "normal zu einer Basis β" äquivalent. Dem ist allerdings nicht so, wie erstmals J.W.S. Cassels [22] im Jahr 1952 zeigen konnte (siehe Kapitel 5.2).

Es lassen sich allerdings auf die gleiche Konstruktionsweise wie oben weitere Zahlen finden, die normal zu einer bestimmten Basis sind. So ist etwa die "binäre Champernowne-Zahl"

$$0.1\ 10\ 11\ 100\ 101\ 110\ 111\ 1000\ \ldots$$

normal zur Basis 2.

4.2 Copeland und Erdös

Bereits D.G. Champernowne [23] hat vermutet, dass die Zahl 0.23571113..., also jene Zahl, deren Dezimalstellen durch die Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge gebildet werden, normal zur Basis 10 ist (Gelegentlich wird auch die Zahl 0.123571113... angegeben, was aber in Hinblick auf Normalität keinerlei Unterschied macht).
Diese Vermutung konnte erstmals 1946 von Arthur H. Copeland und Paul Erdös [32] bewiesen werden, als Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes. Man bezeichnet daher die Zahl 0.23571113... als "Copeland-Erdös-Konstante".

Satz 4.2.1 (Satz von Copeland-Erdös) *Sei $a_1, a_2 \ldots$ eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so dass für jedes $\theta < 1$ für hinreichend großes N gilt $\#\{a_i \mid a_i \leq N\} \geq N^\theta$.*
Dann ist die Zahl

$$0.a_1a_2a_3\ldots,$$

gebildet durch Hintereinanderschreiben der a_i, normal zu jener Basis β, in der diese natürlichen Zahlen gegeben sind.

Der Beweis beruht auf dem Konzept der (j,ϵ)-Normalität, das von Besicovitch [10] eingeführt und von Stoneham verfeinert wurde (siehe Kapitel 8.5).

Eine ganze Zahl a heißt "(j,ϵ)-normal" zur Basis β, falls jede Kombination von j Ziffern, also jeder j-stellige Ziffernblock, in der β-adischen Ziffernentwicklung von a mit einer relativen Häufigkeit zwischen $\beta^{-j}-\epsilon$ und $\beta^{-j}+\epsilon$ vorkommt. Wir definieren (j,ϵ)-Normalität also folgendermaßen:

Definition 4.2.1 *Sei a eine ganze Zahl der Form*

$$a = a_n a_{n-1} \ \ldots \ a_1 a_0 \quad \textit{mit} \quad a_n \neq 0,$$

dargestellt in Basis β. Für jede feste ganze Zahl $j \geq 1$ und jedes $\epsilon > 0$ heißt a "(j,ϵ)-normal" zur Basis β, falls für jeden beliebigen j-stelligen Ziffernblock $B_j = b_1 b_2 \ldots b_j$

$$\left| \frac{N(B_j,a)}{n+1} - \frac{1}{\beta^j} \right| < \epsilon$$

gilt, wobei $N(B_j,a)$ die Anzahl des Erscheinens des Ziffernblocks $B_j = b_1 b_2 \ldots b_j$ in der β-adischen Darstellung von a angibt.

Wir zeigen zunächst das folgende Lemma:

Lemma 4.2.1 *Für hinreichend großes N ist die Anzahl der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich N, die nicht (j,ϵ)-normal bezüglich einer festen Basis β sind, kleiner als N^δ, mit $\delta = \delta(\epsilon,j,\beta) < 1$.*

Beweis: Wir beweisen das Lemma zuerst für den Fall $j=1$, also für $(1,\epsilon)$-Normalität. Wir wählen ein x so, dass $\beta^{x-1} \leq N < \beta^x$ gilt. Dann existieren höchstens

$$\beta \sum\nolimits_1 \beta_k + \beta \sum\nolimits_2 \beta_k$$

natürliche Zahlen kleiner oder gleich N, unter deren Ziffern weniger als $x(1-\epsilon)/\beta$ mal die Ziffer "0", "1", "2" etc., oder mehr als $x(1+\epsilon)/\beta$ mal eine "0", "1", "2" etc. auftritt, wobei $\beta_k = (\beta-1)^{x-k}\binom{x}{k}$ ist und die Summen $\sum_1$ und $\sum_2$ sich über jene Werte von k erstrecken, für die $k < (1-\epsilon)x/\beta$ bzw. $k > (1+\epsilon)x/\beta$ gilt.

Die restlichen Zahlen müssen zwischen $x(1-\epsilon)$ und $x(1+\epsilon)$ Ziffern besitzen und daher muss für diese Zahlen die relative Häufigkeit für das Auftreten der Ziffern "0", "1", "2" etc. zwischen $(1-\epsilon)/\beta(1+\epsilon)$ und $(1+\epsilon)/\beta(1-\epsilon)$ liegen.

Jetzt müssen wir zeigen, dass $\beta\big(\sum_1 \beta_k + \sum_2 \beta_k\big) < N^\delta$ gilt. Die folgenden beiden Ungleichungen ergeben sich aus Abschätzungen für die Binomialkoeffizienten.

$$\sum\nolimits_1 \beta_k < (x+1)\beta_{r_1} \quad \text{und} \quad \sum\nolimits_2 \beta_k < (x+1)\beta_{r_2}$$

mit

$$r_1 = \lfloor (1-\epsilon)x/\beta \rfloor \quad \text{und} \quad r_2 = \lfloor (1+\epsilon)x/\beta \rfloor .$$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$\beta_{k+1}/\beta_k = \frac{x-k}{(k+1)(\beta-1)}$$

erhalten wir

$$\beta_{r_1} \rho_1^{\epsilon x/2} < \beta_{r_1'} < \beta^x,$$

wobei

$$r_1' = \lfloor (1-\epsilon/2)/\beta) \rfloor \quad \text{und} \quad \rho_1 = \frac{x-r_1}{(r_1+1)(\beta-1)}$$

ist, mit $\rho_1 > 1$ für hinreichend großes x. Daraus folgt

$$\beta_{r_1} < (\rho_1^{-\epsilon/2}\beta)^x$$

und, auf gleiche Weise,

$$\beta_{r_2} < (\rho_2^{-\epsilon/2}\beta)^x.$$

Daher ist

$$\beta\Big(\sum\nolimits_1 \beta_1 + \sum\nolimits_2 \beta_2\Big) < \beta(x+1)\Big((\rho_1^{-\epsilon/2}\beta)^x + (\rho_2^{-\epsilon/2}\beta)^x\Big) < \beta^{\delta(x-1)} \le N^\delta$$

und das Lemma ist gezeigt für $(1, \epsilon)$-Normalität.

Für den allgemeineren Fall der (j, ϵ)-Normalität denken wir uns die Ziffern $b_0, b_1, \dots$ einer Zahl $b \le N$ folgendermaßen in Gruppen zusammengefasst:

$$b_0, b_1, \dots, b_{j-1};\ b_j, \dots, b_{2j-1};\ b_{2j}, \dots, b_{3j-1};\ \dots$$

Jede dieser Gruppen entspricht einer einzelnen Ziffer von b, wenn b in der Basis β^j dargestellt wird. Daher gibt es höchstens N^δ Zahlen $b \le N$, für welche die relative Häufigkeit für das Auftreten einer bestimmten Ziffernkombination innerhalb dieser Gruppen ausserhalb des Intervalls von $[\beta^{-j} - \epsilon, \beta^{-j} + \epsilon]$ liegt.

Dasselbe gilt für

$$b_1, b_2, \dots, b_j;\ b_{j+1}, \dots, b_{2j};\ b_{2j+1}, \dots, b_{3j};\ \dots\dots$$

und so fort. Damit ist das Lemma gezeigt. $\square$

Um jetzt den vorhergehenden Satz zu beweisen betrachten wir die Zahlen $a_1, a_2, \dots$ der monoton wachsenden Folge bis zum größten $a_i \le N$, wobei $N = \beta^n$ sei. Zumindest $N^\theta - N^{1-\epsilon}$ dieser Zahlen besitzen wenigstens $n(1-\epsilon)$ Ziffern, da aufgrund der Annahme diese Folge zumindest N^θ Zahlen enthält und höchstens $\beta^{n(1-\epsilon)} = N^{1-\epsilon}$ dieser Zahlen weniger als $n(1-\epsilon)$ Ziffern besitzen.

Daher besitzen all diese Zahlen zusammen insgesamt mindestens $n(1-\epsilon)(N^\theta - N^{1-\epsilon})$ Ziffern. Bezeichne nun f_N die relative Häufigkeit des Auftretens der Ziffer "0". Aus dem vorhergehenden Lemma folgt, dass die Anzahl der a_i, bei denen die relative Häufigkeit des Auftretens der Ziffer "0" größer als $\beta^{-1} + \epsilon$ ist, höchstens N^δ beträgt, und daher ist

$$f_N < \beta^{-1} + \epsilon + \frac{nN^\delta}{n(1-\epsilon)(N^\theta - N^{1-\epsilon})} = \beta^{-1} + \epsilon + \frac{N^{\delta-\theta}}{(1-\epsilon)(1 - N^{1-\epsilon-\theta})}.$$

Da wir θ größer als δ und größer als $1-\epsilon$ wählen können folgt dass der Grenzwert

$$\limsup_{N\to\infty} f_N \leq \beta^{-1} + \epsilon$$

und daher (wir können ϵ beliebig klein wählen)

$$\limsup_{N\to\infty} f_N \leq \beta^{-1}$$

ist.

Ein gleiches Resultat gilt auch für die Ziffern $1, 2, \ldots, \beta - 1$, und daher muss laut Lemma 2.3.2 jede dieser Ziffern mit einer asymptotischen relativen Häufigkeit von β^{-1} auftreten.

Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, dass die asymptotische relative Häufigkeit für das Auftreten jeder Kombination von j Ziffern, also jedes j-stelligen Ziffernblocks, genau gleich β^{-k} ist. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun die Vermutung von Champernowne folgendermaßen beweisen: Die Anzahl der Primzahlen kleiner als N übersteigt $cN/logN$ für jede Konstante $c < 1$, sofern N groß genug gewählt wird. Daher gelten die Vorraussetzungen des Satzes, und somit ist die Copeland-Erdös-Konstante $0.23571113\ldots$ ist normal zur Basis 10. Auch die Normalität der Champernowne-Zahl läßt sich mit diesem Satz sofort beweisen.

4.3 Davenport und Erdös

In diesem Kapitel wird eine Arbeit von H. Davenport und P. Erdös [33] aus dem Jahr 1952 präsentiert. Darin wird die bereits 1946 von Copeland und Erdös [32] aufgestellte Vermutung bewiesen, dass die Zahl $0.f(1)f(2)f(3)\ldots$, gebildet durch Aneinanderreihen der Werte eines Polynoms an den Stellen $x = 1, 2, 3, \ldots$, normal ist.

Das Wort “normal” bezieht sich in diesem Kapitel steht auf Normalität zur Basis 10, so wie auch alle Zahlen stets in Darstellung zur Basis 10 aufzufassen sind. Eine Verallgemeinerung auf andere Basen sollte aber problemlos möglich sein.

Einen Spezialfall des folgenden Satzes, mit $f(x) = x^2$, konnte bereits A.S. Besicovitch [10] im Jahr 1934 beweisen. Wir aber wollen hier nun folgenden Satz zeigen, wobei wir dem von H. Davenport und P. Erdös in [33] angegebenen Beweis folgen:

Satz 4.3.1 (Satz von Davenport-Erdös) *Sei $f(x)$ ein beliebiges, nichtkonstantes Polynom in x, das bei $x = 1, 2, \ldots$ ausschließlich positive ganze Zahlen als Werte annimmt. Dann ist die Zahl*

$$0.f(1)f(2)f(3)\ldots,$$

deren Kommastellen durch Aneinanderreihen der Werte $f(1), f(2), f(3), \ldots$ gebildet werden, normal.

Bemerkung: Damit ein Polynom $f(x)$ an den Stellen $x = 1, 2, \ldots$ ausschließlich ganzzahlige Werte annimmt (wie im Satz verlangt), darf es notwendigerweise keine irrationalen Koeffizienten besitzen. Dies folgt etwa aus dem Satz von Weyl (siehe E. Hlawka [52, S. 33]), laut dem für jedes Polynom $f(x)$, bei dem in $f(x) - f(0)$ zumindest ein irrationaler Koeffizient auftritt, die Folge $f(1), f(2), f(3), \ldots$ gleichverteilt modulo 1 ist.

Beweis des Satzes: Bezeichne $N(t)$ jene Anzahl, mit welcher ein bestimmter k-stelliger Ziffernblock unter den ersten t Nachkommastellen der Zahl $0.f(1)f(2)f(3)\ldots$ auftritt. Allgemeiner sei $N(u,t)$ die Anzahl des Vorkommens dieses Ziffernblocks im Bereich von der $u+1$-ten bis zur t-ten Nachkommastelle. Es ist also $N(0,t) = N(t)$. Für diese Funktion gilt, für $t > u$

$$N(u,t) \leq N(t) - N(u) \leq N(u,t) + (k-1). \tag{4.5}$$

Bezeichne nun g den Grad des Polynoms $f(x)$. Zu jeder positiven natürlichen Zahl n bezeichne weiters x_n den größten ganzzahligen Wert x, für den $f(x)$ aus weniger als n Ziffern besteht. Dann besitzt, für hinreichend großes n, der Funktionswert $f(x_n + 1)$ genau n Ziffern, ebenso wie $f(x_n + 2), \ldots, f(x_{n+1})$. Offensichtlich ist

$$x_n \sim \alpha(10^{1/g})^n \quad \text{für} \quad n \to \infty, \tag{4.6}$$

wobei α eine Konstante bezeichnet. Die letzte Ziffer von $f(x_n)$ stehe in der Dezimalentwicklung $.f(1)f(2)\ldots$ an t_n-ter Stelle. Dann ist die Anzahl der Ziffern im Ziffernblock

$$f(x_n + 1)f(x_n + 2)\ldots f(x_{n+1})$$

bei hinreichend großem n genau $t_{n+1} - t_n$ und daher $n(x_{n+1} - x_n)$, da jeder der Funktionswerte aus n Ziffern besteht. Es ist also für hinreichend großes n

$$t_{n+1} - t_n = n(x_{n+1} - x_n) \tag{4.7}$$

woraus mit (4.6)

$$t_n \sim \alpha n(10^{1/g})^n \quad \text{für} \quad n \to \infty \tag{4.8}$$

folgt.

Um die Normalität der Zahl $.f(1)f(2)f(3)\ldots$ zu beweisen, genügt es zu zeigen dass

$$N(t_n, t) = 10^{-k}(t - t_n) + o(t_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{und} \quad t_n < t < t_{n+1} \tag{4.9}$$

ist. Damit und aus (4.5) ergibt sich

$$N(t) - N(t_h) = \sum_{r=h}^{n-1} N(t_r, t_{r+1}) + N(t_n, t) + R,$$

für passendes festes h und R mit $|R| < nk$. Als ein Spezialfall von (4.9) ergibt sich

$$N(t_r, t_{r+1}) = 10^{-k}(t_{r+1} - t_r) + o(t_r)$$

und daraus die Normalität von $.f(1)f(2)f(3)\ldots$.

Um nun (4.9) zu zeigen können wir nun oBdA. annehmen, dass sich t von t_n um ein ganzzahliges Vielfaches von n unterscheidet. Wir setzen $t = t_n + nX$. Es ist $N(t_n, t)$ die Anzahl des Vorkommens eines festen k-stelligen Ziffenblocks in

$$f(x_n + 1)f(x_n + 2)\ldots f(x_n + X), \tag{4.10}$$

wobei $0 < X < x_{n+1} - x_N$ gilt. Wir können uns auf jene Auftreten des k-stelligen Ziffernblocks beschränken die innerhalb eines Wertes $f(x)$ liegen, da die Anzahl der anderen höchstens gleich $(k-1)(x_{n+1} - x_n)$ und damit laut (4.6) und (4.8) $o(t_n)$ ist. Die Anzahl des Vorkommens eines festen Ziffernblocks $B_k = b_1 b_2 \ldots b_k$ in einem bestimmten $f(x)$ ist gleich der Anzahl jener m mit $k \leq m \leq n$, für die der Bruchteil $\{10^{-m} f(x)\}$ mit den Ziffern $.b_1 b_2 \ldots b_k$ beginnt. Wir definieren $\theta(z)$ als 1, falls z modulo 1 kongruent zu einer Zahl innerhalb des Intervalls $[0.b_1 b_2 \ldots b_k, 0.b_1 b_2 b_k + 10^{-k}]$ ist, und als 0 sonst. Die Anzahl des Vorkommens des Ziffernblocks in $f(x)$ ist dann gleich

$$\sum_{m=k}^{n} \theta(10^{-m} f(x)).$$

Daher ist

$$N(t_n, t) = \sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} \sum_{m=k}^{n} \theta(10^{-m} f(x)) + \mathcal{O}(x_{n+1} - x_n)$$

mit dem vorhin genannten Fehler. Um also (4.9) zu zeigen, genügt es folgende Gleichung zu beweisen:

$$\sum_{m=k}^{n} \sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} \theta(10^{-m} f(x)) = 10^{-k} nX + o(n(x_{n+1} - x_n)) \tag{4.11}$$

für $0 < X \leq x_{n+1} - x_n$. Wir zeigen, dass für jede feste Zahl $\delta > 0$ mit $\delta n < m < (1-\delta)n$

$$\sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} \theta(10^{-m} f(x)) = 10^{-k} X + o(x_{n+1} - x_n) \tag{4.12}$$

gleichmäßig in m gilt. Dies genügt, um (4.11) zu zeigen, denn der Beitrag der fehlenden Werte von m ist höchstens $2\delta n X$ und daher, ebenso wie δ selbst, beliebig klein. Es ist

$$X \leq x_{n+1} - x_n < \alpha (10^{1/g})^{n+1}, \tag{4.13}$$

und wir können ebenso

$$X > (x_{n+1} - x_n)^{1-\delta/2} > \gamma (10^{1/g})^{n(1-\delta/2)} \tag{4.14}$$

mit einer Konstanten $\gamma > 0$ annehmen, da sonst Gleichung (4.12) trivialerweise erfüllt ist.

Man kann nun (siehe H. Weyl [154] und J.F. Koksma [63]) zu jedem $\eta > 0$ zwei 1-periodische Funktionen $\theta_1(z)$ und $\theta_2(z)$ konstruieren, sodass $\theta_1(z) \leq \theta(z) \leq \theta_2(z)$ gilt und θ_1 bzw. θ_2 Fourier-Entwicklungen der Form

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= 10^{-k} - \eta + \sum_{\nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0} A_\nu^{(1)} e^{2\pi i \nu z} \\ \theta_2(z) &= 10^{-k} + \eta + \sum_{\nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0} A_\nu^{(2)} e^{2\pi i \nu z} \end{aligned}$$

besitzen. Dabei sind die Koeffizienten A_ν beschränkt durch

$$|A_\nu| \leq min\Big(\frac{1}{|\nu|}, \frac{1}{\eta \nu^2}\Big).$$

Wenn wir diese Funktionen verwenden, um $\theta(10^{-m} f(x))$ in Gleichung (4.12) zu approximieren, sehen wir dass es ausreichen wird, die Summe

$$S_{n,m,\nu} = \sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} e^{2\pi i (10^{-m}\ \nu f(x))}$$

abzuschätzen. Wir zeigen

$$|S_{n,m,\nu}| < C X^{1-\zeta} \tag{4.15}$$

für alle m und ν, die

$$\delta n < m < (1-\delta) n \quad \text{und} \quad 1 \leq \nu < \eta^{-2} \tag{4.16}$$

genügen, wobei C und ζ positive Zahlen sind, die nur von δ, η und $f(x)$ abhängen. Das reicht aus, um (4.12) zu zeigen, da $X \leq x_{n+1} - x_n$ ist.

Ungleichung (4.15) ist ein Spezialfall der Weyl'schen Ungleichung (Satz 2.5.1, S. 32). Der größte Koeffizient im Polynom $10^{-m}\nu f(x)$ ist $10^{-m}\nu c/d$, wobei c/d den größten Koeffizienten in $f(x)$ (der eine rationale Zahl sein muss) bezeichnet. Wir schreiben

$$10^{-m}\nu\frac{c}{d} = \frac{p}{q}$$

mit teilerfremden ganzen Zahlen p und q und setzen $G = 2^{g-1}$. Dann ist, nach der Weyl'schen Ungleichung

$$|S_{n,m,\nu}|^G < C_1 X^\epsilon q^\epsilon (X^{G-1} + X^G q^{-1} + X^{G-g} q) \tag{4.17}$$

für beliebiges $\epsilon > 0$, wobei C_1 nur von g und ϵ abhängt. Wir haben

$$q \leq 10^m d < 10^{(1-\delta)n} d$$

und

$$q \geq 10^m \nu^{-1} c^{-1} > 10^{\delta n} \eta^2 c^{-1}.$$

Das stellt eine Beziehung zwischen der Größe von q und jener von n her. Beziehungen zwischen n und X finden sich in Ungleichungen (4.13) und (4.14). Damit ergibt sich

$$C_2 X^{g\delta} < q < C_3 X^{g(1-\delta/3)}$$

wobei C_2 und C_3 nur von η, c, d und g abhängen. Wenn wir diese Ungleichungen in (4.17) einsetzen, erhalten wir (4.15). Damit ist der Satz bewiesen. □

Der Vollständigkeit halber sei der folgende weiterreichende Satz aufgeführt, der sich ebenfalls in [33] findet. Der Beweis soll hier nicht wiedergegeben werden, man siehe [33, Seite 61].

Satz 4.3.2 *Für festes j und $\epsilon > 0$ sind fast alle Zahlen $f(1), f(2), \ldots$ (j,ϵ)-normal. Die Anzahl der Werte $n \leq x$, für die $f(n)$ nicht (j,ϵ)-normal ist, ist also ein $o(x)$ für $x \to \infty$.*

Diskrepanzabschätzungen (vgl. Kapitel 6) für die Davenport-Erdös-Zahlen finden sich etwa bei J. Schoißengeier [128] oder J. Schiffer [123]. Allgemeinere Resultate als das soeben besprochene erzielten etwa Y. Nakada und I. Shiokawa. Sie zeigten unter anderem (siehe Nakai und Shiokawa [96]) die Normalität von Zahlen der Form

$$0.\lfloor g(1)\rfloor \lfloor g(2)\rfloor \lfloor g(3)\rfloor \ldots$$

Dabei ist $g(x)$ eine Funktion der Form

$$g(x) = \alpha x^b + \alpha_1 x^{b_1} + \cdots + \alpha_d x^{b_d}$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ungleich Null und $b > b_1 > \cdots > b_d \geq 0$, wobei mindestens eine der Zahlen $b, b_1, \ldots, b_d$ keine ganze Zahl und daher $g(x)$ kein Polynom ist. Weiters muss $g(x) \geq 1$ für $x \geq 1$ erfüllt sein.
Daraus folgt etwa, in Verbindung mit dem Satz von Davenport-Erdös, dass alle Zahlen der Form

$$0.1\lfloor 2^b \rfloor \lfloor 3^b \rfloor \lfloor 4^b \rfloor$$

für eine beliebige reelle Zahl $b > 0$ normal sind.

Ebenfalls von Y. Nakai und I. Shiokawa stammt eine Verallgemeinerung des Satzes von Davenport-Erdös, die nicht nur Polynome mit rationalen Koeffizienten, sondern Polynome mit beliebigen reellen Koeffizienten zulässt. Sie zeigten (siehe Nakai und Shiokawa [97][98]) dass für ein beliebiges Polynom mit rellen Koeffizienten $g(x)$, welches $g(t) > 0$ für $t > 0$ erfüllt, die Zahl

$$0.\lfloor g(1) \rfloor \lfloor g(2) \rfloor \lfloor g(3) \rfloor \ldots$$

normal ist (siehe auch Kapitel 6.3, S. 89). Eine weitere von Y. Nakai und I. Shiokawa stammende Konstruktion normaler Zahlen wird im folgenden Kapitel besprochen werden.

Eine Verallgemeinerung der diesem Kapitel angegebenen Konstruktion normaler Zahlen auf den mehrdimensionalen Fall findet sich in M.B. Levin und M. Smorodinsky "*A $\mathbb{Z}^d$ generalization of the Davenport-Erdös construction of normal numbers*" [77].

4.4 Nakai und Shiokawa

In diesem Kapitel soll eine (relativ) aktuelle Arbeit von Y. Nakai und I. Shiokawa [99] aus dem Jahr 1997 mit dem Titel "*Normality of numbers generated by the values of polynomials at primes*" vorgestellt werden. Dabei handelt es sich in einem gewissen Sinn um eine Verallgemeinerung der in Kapitel 4.3 vorgestellten Konstruktion von Davenport und Erdös. Gleichzeitig wird eine Diskrepanzabschätzung für die konstruierten Zahlen gegeben (näheres zu Diskrepanz siehe Kapitel 6).
In diesem Kapitel sind alle Zahlen, Ziffernblöcke etc. dargestellt bezüglich einer festen Basis $\beta \geq 2$ zu verstehen.

Wir wollen hier den folgenden Satz zeigen, und dabei dem von Nakai und Shiokawa [99] angeführten Beweis folgen:

Satz 4.4.1 *Sei $f(x)$ ein nichtkonstantes Polynom, das bei positiven natürichen Zahlen ausschließlich positive natürliche Zahlen als Werte annimmt (und daher ausschließlich rationale Koeffizienten besitzt, siehe Bemerkung auf S. 47). Dann ist die Zahl*

$$a(f) = 0.f(2)f(3)f(5)f(7)f(11)f(13)\ldots,$$

gebildet durch Aneinanderreihen der Werte des Polynoms an den Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge, normal zur Basis β. Genauer ist für jeden k-stelligen Ziffernblock B_k

$$\frac{N(B_k, A_n)}{n} = \frac{1}{\beta^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log n}\right), \tag{4.18}$$

wobei A_n die ersten n Nachkommaziffern der Zahl $a(f)$ bezeichnet und die durch das Landau-Symbol implizierte Konstante ausschließlich von β, k und dem Polynom f abhängt.

Beweis: Sei $a(f) = 0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ die Zifferndarstellung von $a = a(f)$ zur Basis β. Dann gehört jedes a_n zu einem bestimmten $(f(p_\nu))$, wobei p_ν die ν-te Primzahl ist und sich $\nu = \nu(n)$ berechnet läßt durch

$$\sum_{i=1}^{\nu-1}\big(\lfloor\log_\beta f(p_i)\rfloor + 1\big) < n \le \sum_{i=1}^{\nu}\big(\lfloor\log_\beta f(p_i)\rfloor + 1\big).$$

Wir setzen $x = x(n) = p_{\nu(n)}$, so dass

$$n = \sum_{p\le x}\log_\beta f(p) + \mathcal{O}(\pi(x)) + \mathcal{O}(\log_\beta f(x)) = \frac{dx}{\log\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{4.19}$$

gilt, wobei $d \ge 1$ den Grad des Polynoms $f(t)$ bezeichnet, die Summe über alle Primzahlen p läuft und $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x bedeutet. Laut dem Primzahlsatz gilt

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\ x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\log x)^G}\right)$$

mit einer beliebigen positiven Konstanten G und

$$\mathrm{Li}\ x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} N(B_k, A_n) &= \sum_{p\le x} N(B_k, f(p)) + \mathcal{O}(\pi(x)) + \mathcal{O}(\log_\beta f(x)) \\ &= \sum_{p\le x} N(B_k, f(p)) + \mathcal{O}\left(\frac{n}{\log n}\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

mit $x = x(n) = p_{\nu(n)}$. Dabei bezeichnet $N(B_k, f(p))$ natürlich jene Anzahl, mit welcher der k-stellige Ziffernblock B_k in der Ziffernentwicklung von $f(p)$ zur Basis β auftritt.

Sei j_0 eine hinreichend große Konstante. Dann gibt es zu jedem ganzzahligen $j \geq j_0$ eine ganze Zahl n_j, so dass

$$\beta^{j-2} \leq f(n_j) < \beta^{j-1} \leq f(n_j + 1) < \beta^j$$

ist.
Wir stellen fest, dass

$$n_j \gg\ll \beta^{j/d}$$

gilt, und dass $n_j < n < n_{j+1}$ genau dann gilt, wenn $f(n)$ aus j Ziffern besteht, oder, anders formuliert,

$$f(n) = c_{j-1} \dots c_1 c_0 \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}^j \quad \text{mit} \quad c_{j-1} \neq 0. \tag{4.21}$$

Zu jedem $x > \beta^{j_0}$ definieren wir eine ganze Zahl $J = J(x)$ durch

$$n_J < x \leq n_{J+1},$$

sodass

$$J = \log_\beta f(x) + \mathcal{O}(1) \gg\ll \log x \tag{4.22}$$

ist. Sei nun n eine ganze Zahl, die $n_j < n \leq n_{j+1}$ erfüllt, mit $j_0 < j \leq J$, so dass also $f(n)$ wie in (4.21) geschrieben werden kann. Wir bezeichnen mit $N^*(B_k, f(n))$ die Anzahl des Vorkommens des k-stelligen Ziffernblocks B_k in dem J-stelligen Ziffernblock $\underbrace{0 \dots 0}_{J-j} c_{j-1} \dots c_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{p \leq x} N^*(B_k, f(p)) - \sum_{p \leq x} N(B_k, f(p)) \\
&\leq \sum_{j=j_0+1}^{J-1} (J - j)(\pi(n_{j+1}) - \pi(n_j)) + \mathcal{O}(1) \\
&\leq \sum_{j=j_0+1}^{J-1} \pi(n_{j+1}) + \mathcal{O}(1) \\
&\ll \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\beta^{j/d}}{J} \ll \frac{x}{\log x}
\end{aligned}$$

und somit

$$N(B_k, A_n) = \sum_{p \leq x} N^*(B_k, f(p)) + \mathcal{O}\left(\frac{n}{\log n}\right) \tag{4.23}$$

mit $x = x(n) = p_{\nu(n)}$.

Wenn wir nun noch die Gleichung

$$\sum_{p \leq x} N^*(B_k, f(p)) = \frac{1}{\beta^k}\pi(x)\log_\beta f(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{4.24}$$

zeigen können, ist gemeinsam mit (4.23) und (4.19) Gleichung (4.18) und damit der Satz bewiesen.

Wir benötigen zunächst einige Lemmata:

Lemma 4.4.1 *Sei $F(x)$ eine l-fach differenzierbare reellwertige Funktion, welche die Ungleichung $|F^{(l)}(x)| \geq \lambda > 0$ auf einem Intervall $[y, z]$ erfüllt. Dann ist*

$$\left| \int_y^z e^{2\pi i F(x)} dx \right| \leq c(l)\lambda^{-1/l}.$$

Ein Beweis dieses Lemmas findet sich bei E.C. Titchmarsh [144, Kapitel 4.19].

Lemma 4.4.2 *Sei*

$$F(t) = \frac{h}{q}t^d + \alpha_1 t^{d-1} + \cdots + \alpha_k$$

mit teilerfremden ganzen Zahlen h und q sowie reellen Zahlen α_i. Falls die Ungleichung

$$(\log x)^\sigma \leq q \leq x^d (\log x)^{-\sigma}$$

für $\sigma > 2^{6d}(\sigma_0 + 1)$ mit $\sigma_0 > 0$ erfüllt wird, dann gilt

$$\left| \sum_{p \leq x} e^{2\pi i F(p)} \right| \leq c(d)x(\log x)^{-\sigma_0}$$

für hinreichend großes x, wobei sich die Summe auf der linken Seite über alle Primzahlen $p \leq x$ erstreckt.

Dieses Resultat geht auf I.M. Vinogradov zurück. Für einen Beweis siehe L. Hua [53, Satz 10, Seite 66].

Lemma 4.4.3 *Sei*

$$F(x) = b_0 x^d + b_1 x^{d-1} + \cdots + b_{d-1}x + b_d$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und sei q eine positive ganze Zahl. Wenn wir mit D den größten gemeinsamen Teiler von $q, b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}$ bezeichnen, dann ist

$$\left| \sum_{n=1}^{q} e^{2\pi i \frac{F(n)}{q}} \right| \leq d^{3\omega(q/D)} D^{1/d} q^{1-1/d}$$

für hinreichend großes q, wobei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler einer Zahl n bezeichnet.

Ein Beweis dieses Lemmas ist ebenfalls bei L. Hua [53, Lemma 1.3 auf S. 2 und Lemma 1.6 auf S. 5] angeführt.

Lemma 4.4.4 *Sei $F(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und mit führendem Term αx^d, wobei $d \geq 2$ und $\alpha \neq 0$ gelte. Sei weiters eine rationale Zahl p/q mit $ggT(p,q) = 1$ so gewählt, dass $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ gilt. Weiters sei die Ungleichung*

$$(\log Q)^H \leq q \leq \frac{Q^d}{(\log Q)^H}$$

für $H > d^2 + 2^d G$ und $G \geq 0$ erfüllt. Dann ist

$$\Big|\sum_{1\leq n\leq Q} e^{2\pi i F(n)}\Big| \ll \frac{Q}{(\log Q)^G}.$$

Dieses Lemma wurde von Nakai und Shiokawa [97] bewiesen.

Lemma 4.4.5 *Seien $f(t)$ und B_k wie in Satz 4.4.1. Dann gilt*

$$\sum_{n\leq y} N(B_k, f(n)) = \frac{1}{\beta^k} y \log_\beta f(y) + \mathcal{O}(y)$$

für $y \to \infty$, wobei die durch das Landau-Symbol implizierte Konstante ausschließlich von β, k und dem Polynom f abhängt.

Für einen Beweis des Lemmas siehe Nakai und Shiokawa [98].

Nun müssen wir also, um den Satz zu beweisen, Ungleichung (4.24) zeigen. Wir schreiben

$$\sum_{p\leq x} N^*(B_k, f(p)) = \sum_{p\leq x}\sum_{m=k}^{J} I\left(\frac{f(p)}{\beta^m}\right)$$

mit

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{j=1}^k b_j\beta^{-j} \leq t - \lfloor t\rfloor \leq \sum_{j=1}^k b_j\beta^{-j} + \beta^{-k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei die Ziffern des Blocks B_k mit $b_1 \dots b_k$ bezeichnet werden.

Nun gibt es (siehe I.M. Vinogradov [145]) Funktionen $I_+(t)$ und $I_-(t)$, für welche $I_-(t) \leq I(t) \leq I_+(t)$ gilt und die eine Fourier-Entwicklung der Form

$$I_+(t) = \beta^{-k} + J^{-1} + \sum_{\nu\in\mathbb{Z},\ \nu\neq 0} A_+(\nu)\, e^{2\pi i\nu t}$$

bzw.

$$I_-(t) = \beta^{-k} - J^{-1} + \sum_{\nu\in\mathbb{Z},\ \nu\neq 0} A_-(\nu)\ e^{2\pi i\nu t}$$

mit

$$|A_\pm(\nu)| \ll \min(|\nu|^{-1}, J\nu^{-2})$$

besitzen (vgl. den Beweis des Satzes von Davenport-Erdös, S. 47).

Wir wählen eine hinreichend große Konstante c_0 und setzen

$$M = \lfloor c_0 \log_\beta J \rfloor. \tag{4.25}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\le x} N^*(B_k, f(p)) && (4.26)\\
&\lesseqgtr \left(\sum_{k\le m\le dM} + \sum_{dM<m\le J-M} + \sum_{J-M<m\le J} \right) \sum_{p\le x} I_\pm\left(\frac{f(p)}{\beta^m}\right)\\
&= \sum{}_1 + \frac{\pi(x)}{\beta^k}(J-dM) + \sum{}_2 + \sum{}_3 + \mathcal{O}(\pi(x)),
\end{aligned}$$

wobei d den Grad des Polynoms $f(x)$ bezeichnet und

$$\begin{aligned}
\sum{}_1 &= \sum{}_{1(\pm)} = \sum_{k\le m\le dM} \sum_{p\le x} I_\pm\left(\frac{f(p)}{\beta^m}\right)\\
\sum{}_2 &= \sum{}_{2(\pm)} = \sum_{dM<m\le J-M} \sum_{1\le|\nu|\le J^2} A_\pm(\nu) \sum_{p\le x} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(p)}\\
\sum{}_3 &= \sum{}_{3(\pm)} = \sum_{J-M<m\le J} \sum_{1\le|\nu|\le J^2} A_\pm(\nu) \sum_{p\le x} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(p)}
\end{aligned}$$

Wir wollen zuerst $\sum_2$ abschätzen. Wir nehmen also $dM \le m \le J - M$ an. Dann erhalten wir, wenn wir den Führungskoeffizienten des Polynoms $\nu\beta^{-m} f(t)$ als α/q mit $ggT(\alpha, q) = 1$ schreiben,

$$(\log x)^\sigma \le q \le x^d (\log x)^{-\sigma}$$

für eine große Konstante σ. Daher gilt laut Lemma 4.4.2

$$\sum_{p\le x} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(p)} \ll x(\log x)^{-\sigma_0}$$

mit einer Konstanten $\sigma_0 > 3$. Daraus ergibt sich

$$\sum{}_2 \ll x(\log x)^{2-\sigma_0} \ll \frac{x}{\log x}. \tag{4.27}$$

Nun wenden wir den weiter oben erwähnten Primzahlsatz auf $\sum_3$ an. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{p\le x} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(p)} &= \int_2^x e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(t)}\, d\pi(t) + \mathcal{O}(1) \\
&= \int_2^x e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(t)}\, \frac{dt}{\log t} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^G}\Big) \\
&= \int_{x(\log x)^{-G}}^x e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(t)}\, \frac{dt}{\log t} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^G}\Big) \\
&\ll \frac{1}{\log x} \sup_\xi \Big| \int_{x(\log x)^{-G}}^\xi e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(t)}\, dt \Big| + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^G}\Big) \\
&\ll \frac{1}{\log x} \Big(\frac{|\nu|}{\beta^m}\Big)^{-1/d} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^G}\Big),
\end{aligned}$$

indem wir den zweiten Mittelwertsatz und Lemma 4.4.1 mit $|\nu\beta^{-m} f^{(d)}(t)| \gg |\nu|\beta^{-m}$ anwenden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum{}_3 &\ll \sum_{1\le|\nu|\le J^2} |\nu|^{-1} \sum_{J-M\le m\le J} \left(\frac{1}{\log x}\Big(\frac{|\nu|}{\beta^m}\Big)^{-1/d} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^G}\Big)\right) \qquad (4.28)\\
&\ll \frac{1}{\log x} \sum_{1\le|\nu|\le J^2} \frac{1}{|\nu|^{1+1/d}} \sum_{m\le J} \beta^{-m/d} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^{G-2}}\Big) \\
&\ll \frac{x}{\log x}
\end{aligned}$$

Um nun Satz 4.4.1 zu beweisen verbleibt uns, die Beziehung

$$\sum{}_1 = \frac{\pi(x)}{\beta^k} dM + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{\log x}\Big) \qquad (4.29)$$

zu zeigen, da aus dieser in Verbindung mit (4.22), (4.26), (4.27) und (4.28)

$$\sum_{p\le x} N^*(B_k, f(p)) = \frac{\pi(x)}{\beta^k} J + \mathcal{O}\big(\pi(x)\big) = \frac{\pi(x)}{\beta^k} \log_\beta f(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{\log x}\Big)$$

folgt, also die gewünschte Ungleichung (4.24).

Es bleibt also noch Ungleichung (4.29) zu zeigen. Wir werden dies in drei Schritten durchführen.

Schritt 1: Wir nehmen $k \le m \le dM$ an, mit M wie in (4.22) bzw. (4.25). Wir werden den Primzahlsatz in folgender Form (siehe M.N. Huxley [54, Kapitel 17]) anwenden:

Sei $\pi(x; q, \alpha)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ in einer arithmetischen Reihe $p \equiv \alpha \pmod q$ mit $ggT(\alpha, q) = 1$, und $\varphi(n)$ bezeichne die Euler'sche φ-Funktion. Dann gilt

$$\pi(x; q, \alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \mathrm{Li}\ x + \mathcal{O}(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

gleichmäßig in $1 \leq q \leq (\log x)^H$, mit einer Konstanten $c > 0$, die von einer beliebig gewählten Konstante $H > 0$ abhängt (für uns genügt hier ein schwächeres Ergebnis mit $\mathcal{O}(x(\log x)^{-G})$ auf der rechten Seite).

Bezeichne D das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der (rationalen) Koeffizienten von $f(t)$, ausgenommen den konstanten Term. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq x} I_\pm\left(\frac{f(p)}{\beta^m}\right) &= \sum_{p \leq x,\ ggT(p, D\beta)=1} I_\pm\left(\frac{f(p)}{\beta^m}\right) + \mathcal{O}(1) \\
&= \sum_{\substack{\alpha \bmod D\beta^m \\ ggT(a, D\beta) = 1}} I_\pm\left(\frac{f(\alpha)}{\beta^m}\right) \pi(x; D\beta^m, \alpha) + \mathcal{O}(1) \\
&= \sum_{\substack{\alpha \bmod D\beta^m \\ ggT(a, D\beta) = 1}} I_\pm\left(\frac{f(\alpha)}{\beta^m}\right)\left(\frac{1}{\varphi(D\beta^m)}\ \mathrm{Li}\ x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\log x)^G}\right)\right) + \mathcal{O}(1) \\
&= \frac{\pi(x)}{\varphi(D\beta^m)} \sum_{\substack{\alpha \bmod D\beta^m \\ ggT(a, D\beta) = 1}} I_\pm\left(\frac{f(\alpha)}{\beta^m}\right) + \mathcal{O}\left(\beta^m \frac{x}{(\log x)^G}\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_1 &\lesseqgtr \sum_{k \leq m \leq dM} \frac{\pi(x)}{\varphi(D\beta^m)} \sum_{\substack{\alpha \bmod D\beta^m \\ ggT(a, D\beta) = 1}} I_\pm\left(\frac{f(\alpha)}{\beta^m}\right) + \mathcal{O}\left(M\beta^{dM} \frac{x}{(\log x)^G}\right) \qquad (4.30) \\
&= \sum_{k \leq m \leq dM} \frac{\pi(x)}{\varphi(D\beta^m)} \sum_{\alpha \bmod D\beta^m} I_\pm\left(\frac{f(\alpha)}{\beta^m}\right) \sum_{b | ggT(\alpha, D\beta)} \mu(b) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \\
&= \sum_{b | D\beta} \mu(b) \sum_{k \leq m \leq dM} \frac{\pi(x)}{\varphi(D\beta^m} \sum_{\alpha \bmod D\beta^m,\ b | \alpha} I_\pm\left(\frac{f(\alpha)}{\beta^m}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \\
&= \pi(x) \frac{D\beta}{\varphi(D\beta)} \sum_{b | D\beta} \mu(b) \sum_{k \leq m \leq dM} \frac{1}{D\beta^m} \sum_{1 \leq n \leq D\beta^m / b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right),
\end{aligned}$$

wobei $\mu(n)$ die Möbius'sche μ-Funktion bezeichnet. Das Symbol "$\lesseqgtr$" bedeutet dabei "$\leq$" für $\sum_{1(+)}$ bzw. "$\geq$" für $\sum_{1(-)}$. Außerdem gilt $D\beta = \mathcal{O}(1)$.

Schritt 2: Wir wollen zeigen, dass für jedes b, welches $b \mid D\beta$ erfüllt,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\le m\le dM} \frac{1}{D\beta^m} \sum_{1\le n\le D\beta^m/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) \\
= &\sum_{k\le m\le dM} \frac{1}{D\beta^M} \sum_{1\le n\le D\beta^M/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) + \mathcal{O}(1)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

gilt.
Für $k \le m \le M$ haben wir

$$\frac{1}{D\beta^m} \sum_{1\le n\le D\beta^m/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) = \frac{1}{D\beta^M} \sum_{1\le n\le D\beta^M/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right)$$

und daher

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\le m<M} \frac{1}{D\beta^m} \sum_{1\le n\le D\beta^m/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) \\
= &\sum_{k\le m\le M} \frac{1}{D\beta^M} \sum_{1\le n<D\beta^M/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Falls $d = 1$ ist, folgt aus (4.32) auch (4.31). Wir können daher im Folgenden $d \ge 2$ annehmen.Weiters wollen wir $M \le m \le dM$ voraussetzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le n\le D\beta^m/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) \\
\lesseqgtr\ &\frac{D\beta^m}{b}\cdot\frac{1}{\beta^k} + \mathcal{O}\left(\frac{\beta^m}{J}\right) + \mathcal{O}\left(\sum_{1\le|\nu|\le J^2} \frac{1}{|\nu|}\left|\sum_{1\le n\le D\beta^m/b} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(bn)}\right|\right) \\
= \ &\frac{D\beta^m}{b}\cdot\frac{1}{\beta^k} + \mathcal{O}\left(\frac{\beta^m}{J}\right) + \mathcal{O}(\beta^{m(1-1/d)} J^{2/d}\log J),
\end{aligned}$$

(wieder mit "$\lesseqgtr$" als "$\le$" bzw. "$\ge$", je nachdem, ob wir I_+ oder I_- betrachten) da laut Lemma 4.4.3

$$\left|\sum_{1\le n\le D\beta^m/b} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(bn)}\right| \ll \left(\mathrm{ggT}(\beta^m,\nu)\right)^{1/d} \beta^{m(1-1/d)}$$

ist.
Damit erhalten wir

$$\sum_{M\le m\le dM} \frac{1}{D\beta^m} \sum_{1\le n\le D\beta^m/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) = \frac{(d-1)M}{b\beta^k} + \mathcal{O}(1). \tag{4.33}$$

Nun wollen wir noch

$$\sum_{M\le m\le dM}\frac{1}{D\beta^M}\sum_{1\le n\le D\beta^M/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right)=\frac{(d-1)M}{b\beta^k}+\mathcal{O}(1) \tag{4.34}$$

zeigen, was gemeinsam mit (4.33) und (4.32) auf (4.31) führt.

Um nun also (4.34) zu zeigen, stellen wir zuerst folgendes fest: Es ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{M\le m\le dM}\frac{1}{D\beta^M}\sum_{1\le n\le D\beta^M/b} I_\pm\left(\frac{f(bn)}{\beta^m}\right) && (4.35)\\
\lesseqgtr\;& \frac{1}{D\beta^M}\sum_{M\le m\le dM}\sum_{1\le n\le D\beta^M/b}\left(\frac{1}{\beta^k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{J}\right)+\sum_{1\le|\nu|\le J^2}A_\pm(\nu)e^{2\pi i\frac{\nu}{\beta^m}f(bn)}\right)\\
=\;& \frac{(d-1)M}{b\beta^k}+\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}\left(\sum_{1\le|\nu|\le J^2}\frac{1}{|\nu|}\cdot\frac{1}{D\beta^M}\sum_{M\le m\le dM}\left|\sum_{1\le n\le D\beta^M/b}e^{2\pi i\frac{\nu}{\beta^m}f(bn)}\right|\right).
\end{aligned}$$

Um die letzte Summe abzuschätzen, gehen wir folgendermaßen vor: Sei H eine große Konstante. Dann können wir zu allen ν, m und b laut dem Dirichlet'schen Approximationssatz (siehe etwa E. Hlawka [52, Seite 1]) teilerfremde ganze Zahlen α und $q=q(\nu,m,b)$ finden, so dass die Ungleichungen

$$1\le q\le\frac{Q^d}{(\log Q)^H}\quad\text{mit}\quad Q=D\beta^M/b$$

und

$$\left|\frac{\nu}{\beta^m}b^d-\frac{\alpha}{q}\right|<\frac{(\log Q)^H}{qQ^d}\quad\left(\le\frac{1}{q^2}\right)$$

erfüllt sind.
Falls

$$(\log Q)^H\le q\le\frac{Q^d}{(\log Q)^H}$$

gilt, dann folgt mit Lemma 4.4.4

$$\left|\sum_{1\le n\le D\beta^M/b}e^{2\pi i\frac{\nu}{\beta^m}f(bn)}\right|\ll\frac{Q}{(\log Q)^G}\ll\frac{\beta^M}{(\log J)^2}.$$

Daher ist der Beitrag dieser Summen im letzten Term von (4.35)

$$\ll\frac{1}{D\beta^M}(d-1)M\log J\cdot\frac{\beta^M}{(\log J)^2}=\mathcal{O}(1).$$

Falls jedoch

$$1\le q\le(\log Q)^H\quad(\gg\ll M^H)$$

ist, dann gilt wegen $m \geq M$ insbesondere $\mathrm{ggT}(\nu, \beta^m)b^d \neq \alpha/q$. Daher ist

$$\frac{1}{q\beta^m} \leq \left| \frac{\nu}{\beta^m} b^d - \frac{\alpha}{q} \right| \ll \frac{M^H}{q\beta^{dM}}$$

und weiter

$$(dM \geq) \;\; m \geq dM - H_1 \log M$$

mit einer hinreichend großen Konstanten H_1. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\nu}{\beta^m} f(bt) \gg\ll \frac{\nu}{\beta^m} t^{d-1} \ll J^2 \beta^{-M+H_1 \log M} = o(1)$$

im Intervall $[1, D\beta^M/b]$. Nach einem Lemma von van der Corput (siehe E.C. Titchmarsh [144, Lemma 4.8]) und Lemma 4.4.1 folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq n \leq D\beta^M/b} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(bn)} &= \int_1^{D\beta^M/b} e^{2\pi i \frac{\nu}{\beta^m} f(bn)}\, dt + \mathcal{O}(1) \\
&\ll \left| \frac{\nu}{\beta^m} f^{(d)}(t) \right|^{-1/d} + \mathcal{O}(1) \\
&\ll \left(\frac{|\nu|}{\beta^m} \right)^{-1/d}.
\end{aligned}$$

Daher ist der Beitrag dieser Summen zum letzten Term von (4.35)

$$\ll \frac{1}{D\beta^M} \sum_{M \leq m \leq dM} \sum_{1 \leq |\nu| \leq J^2} \frac{1}{|\nu|} \left(\frac{|\nu|}{\beta^m} \right)^{-1/d} = \mathcal{O}(1).$$

Wenn wir diese Ergebnisse zusammenfassen erhalten wir (4.34).

Schritt 3: Aus (4.30) und (4.31) folgt

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_1 &\lesseqgtr \pi(x) \frac{D\beta}{\varphi(D\beta)} \sum_{b \mid D\beta} \mu(b) \frac{1}{D\beta^M} \sum_{k \leq m \leq dM} \sum_{1 \leq n \leq D\beta^M/b} I_{\pm}\left(\frac{f(bn)}{\beta^m} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x} \right) \\
&\lesseqgtr \pi(x) \frac{D\beta}{\varphi(D\beta)} \sum_{b \mid D\beta} \mu(b) \frac{1}{D\beta^M} \sum_{k \leq m \leq dM} \sum_{1 \leq n \leq D\beta^M/b} I\left(\frac{f(bn)}{\beta^m} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x} \right).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun in Lemma 4.4.5 $y = D\beta^M/b$ setzen, so dass $\log_\beta f(by) = dM + \mathcal{O}(1)$ ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leq m \leq dM} \sum_{1 \leq n \leq D\beta^M/b} I\left(\frac{f(bn)}{\beta^m} \right) &= \sum_{n \leq y} N\big(B_k, f(bn)\big) + \mathcal{O}(\beta^M) \\
&= \beta^{-k} y \log_\beta f(by) + \mathcal{O}(\beta^M) \\
&= \beta^{-k} \frac{D\beta^M}{b} dM + \mathcal{O}(\beta^M).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_1 &\lesseqgtr \frac{D\beta}{\varphi(D\beta)} \sum_{b|D\beta} \frac{\mu(b)}{b} \cdot \frac{dM}{\beta^k}\pi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \\ &= \beta^{-k} dM\pi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right),\end{aligned}$$

also (4.29), womit der Beweis des Satzes vollständig ist. □

4.5 Weitere Konstruktionen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden eine "aktuelle" sowie einige "klassische" Methoden zur Konstruktion normaler Zahlen angegeben. Selbstverständlich gibt es darüber hinaus viele weitere mögliche Konstruktionen, auf die wir hier nicht näher eingehen können. Kurz erwähnt seien nur die folgenden:

P. Szüsz und B. Volkmann [143] beschrieben "*A combinatorial method for constructing normal numbers*" und zeigten die Normalität von Zahlen der Form

$$a(f) = 0.\lfloor|f(1)|\rfloor \lfloor|f(2)\rfloor \lfloor|f(3)|\rfloor \dots$$

mit beispielsweise

$$f(n) = \frac{(\pi n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{5}}}{\log^2 n}$$

oder

$$f(n) = p_n^b \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{R},\ b > 0$$

wobei p_n die n-te Primzahl bezeichnet.

Von R.G. Stoneham stammt folgender Satz zur Konstruktion normaler Zahlen:

Satz 4.5.1 *Seien $\beta \geq 2$ und $m \geq 2$ teilerfremde ganze Zahlen. Für ganze Zahlen $y \geq 2$, teilerfremd zu β, bezeichne $w(y)$ die multiplikative Ordnung von y modulo β. Weiters seien $b_0, b_1, b_2, \dots$ und $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ zwei Folgen natürlicher Zahlen mit $b_0 = Z_0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $1 \leq Z_n < m^n$ und $ggT(Z_n, m) = 1$ für alle $n \geq 1$. Sei $S(n,m) = \sum_{j=1}^n b_j w(m^j)$ und $S(0,m) = 0$, dann ist die Zahl*

$$a(\beta, m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{n+1} - mZ_n}{m^{n+1}\beta^{S(n,m)}}$$

normal zur Basis β.

Ein Beweis, in dessen Verlauf auch die Transzendenz der so konstruierten Zahl gezeigt wird, und welcher auf älteren Resultaten (Stoneham [139][142]) aufbaut, findet sich bei Stoneham [136].

Konstruktionen normaler Zahlen mit möglichst geringer Diskrepanz (siehe Kapitel 6) stammen etwa von N.M. Korobov [65][66] und M.L. Levin [74][75][76], der ein Ergebnis erreichte *that cannot be improved essentially*.

Zwei mögliche Konstruktionen von Zahlen, die zu bestimmten Basen normal, aber nicht normal zu anderen Basen sind, finden sich im folgenden Kapitel (Kapitel 5).

Häufig ist der Beweis dafür, dass eine gewisse Konstruktion normale Zahlen liefert, zugleich verbunden mit einer Diskrepanzabschätzung und in ebendieser enthalten. In Kapitel 6 wird ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Normalität einer Zahl a (zur Basis β) und der Diskrepanz der Folge $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ hergestellt. Dadurch wird etwa mittels der Diskrepanzabschätzung in Kapitel 6.3 auch die Normalität einer Klasse von Zahlen gezeigt, die eine Verallgemeinerung der Davenport-Erdös-Zahlen darstellen.

Kapitel 5

Normalität zu verschiedenen Basen

5.1 Normalität zu äquivalenten Basen

Es stellt sich die Frage, wann man aus Normalität einer Zahl a zu einer bestimmten Basis auch Normalität zu bestimmten anderen Basen schließen kann. Das führt uns auf folgende Definition:

Definition 5.1.1 *Zwei natürliche Zahlen r und s heißen "äquivalent", in Zeichen $r \sim s$, wenn die eine rationale Potenz der anderen ist, wenn es also natürliche Zahlen b, d, e gibt, so dass $r = b^d$ und $s = b^e$ ist.*

Wir zeigen nun folgenden Satz:

Satz 5.1.1 *Eine reelle Zahl a ist normal zur Basis β genau dann, wenn sie normal zur Basis β^n ist, wobei n eine beliebige positive natürlich Zahl bezeichnet.*

Beweis : Sei eine reelle Zahl a normal zur Basis β. Dann ist sie (siehe Definition 3, Seite 12) einfach normal zu allen Basen $\beta, \beta^2, \beta^3, \dots$ und daher insbesondere einfach normal zu allen Basen $\beta^n, \beta^{2n}, \beta^{3n}, \dots$, oder, anders geschrieben, $(\beta^n), (\beta^n)^2, (\beta^n)^3, \dots$. Damit ist sie aber, wieder laut Definition 3, normal zur Basis β^n.

Sei umgekehrt a normal zur Basis β^n. Dann ist a einfach normal zu den Basen $\beta^n, \beta^{2n}, \beta^{3n}, \dots$. Es gibt also eine monotone Folge $m_1 = n < m_2 = 2n < m_3 = 3n, \dots$, so dass a einfach normal zu allen Basen $\beta^{m_1}, \beta^{m_2}, \beta^{m_3}, \dots$ ist. Wir können daher Satz 2.3.2 (Seite 20) anwenden und erhalten, dass a normal zur Basis β ist. $\square$

Damit ergibt sich umgehend folgender Satz:

Satz 5.1.2 *Seien r und s äquivalent, also $r \sim s$. Dann ist eine reelle Zahl a normal zur Basis r genau dann, wenn sie normal zur Basis s ist.*

Beweis: Es gilt $r \sim s$, es existieren also laut Definition natürliche Zahlen b, d, e mit $r = b^d$ und $s = b^e$. Sei a normal zur Basis $r = b^d$. Das ist laut dem vorigen Satz genau dann der Fall, wenn a normal zur Basis b ist, was wiederum äquivalent mit Normalität zur Basis $b^e = s$ ist. □

5.2 Konstruktion normaler Zahlen, die nicht absolut normal sind

Es stellt sich die Frage, ob Normalität bezüglich einer festen Basis auch Normalität zu allen anderen Basen impliziert. Anders gesagt, ist Normalität eine Eigenschaft der Zahl an sich, so wie etwa Transzendenz oder Irrationalität, und somit unabhängig von der Darstellung in einer bestimmten Basis, oder hängt Normalität sehr wohl von der Art der Darstellung ab?
Die Antwort auf diese Frage gaben unabhängig voneinander J.W.S. Cassels und, wenig später, W.M. Schmidt. Wir wollen in diesem Kapitel die Ergebnisse der Arbeit von J.W.S. Cassels [22] vorstellen. Die entsprechenden Überlegungen von W.M. Schmidt finden sich in [126] (siehe auch Anmerkungen in Kapitel 5.3, S. 72).

Bezeichne $\mathcal{U}_3$ die Menge aller Zahlen $0 \leq a < 1$, in deren Darstellung zur Basis 3 kein einziges mal die Ziffer "2" auftritt. Wir definieren auf dieser Menge ein Maß auf folgende Weise: Jeder Zahl a in $\mathcal{U}_3$

$$a = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots \quad \text{mit} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

ordnen wir einen Wert $\mathcal{M}(a)$

$$\mathcal{M}(a) = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + a_3 2^{-3} + \dots$$

mit $0 \leq \mathcal{M}(a) \leq 1$ zu. Umgekehrt ist jede Zahl $0 \leq \mathcal{M} \leq 1$ von der Form $\mathcal{M}(a)$ für ein passendes $a \in [0, 1)$, und dieses a ist eindeutig bestimmt abgesehen von abzählbar vielen Fällen (genau jenen, in denen $2^\tau \mathcal{M}$ eine ganze Zahl ergibt für ein passendes positives $\tau \in \mathbb{N}$).

Unter dem μ-Maß einer Teilmenge $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}_3$ verstehen wir das Lebesgue-Maß der zugehörigen Menge der $\mathcal{M}(a)$ mit $a \in \mathcal{V}$. Wir sagen, dass μ-fast-alle Zahlen in $\mathcal{U}_3$ eine bestimmte Eigenschaft haben, wenn die Menge jener Zahlen, die diese Eigenschaft nicht haben, μ-Maß 0 besitzt. Wir behaupten nun folgenden Satz:

Satz 5.2.1 *μ-fast-alle Zahlen in $\mathcal{U}_3$ sind normal zu jeder Basis β, die keine Potenz von 3 ist.*

Die Zahlen in $\mathcal{U}_3$ sind offensichtlich aufgrund unserer Konstruktion zu keiner Basis, die eine Potenz von 3 ist, normal.

Wir können den Satz auf folgendes bedeutend einfachere Lemma zurückführen:

Lemma 5.2.1 *Sei h eine beliebige ganze Zahl ungleich 0 und $\beta \geq 2$ eine ganze Zahl, die keine Potenz von 3 ist. Dann ist*

$$\sum_{0 \leq n < N} e^{2\pi i h \beta^n a} = o(N) \quad \textit{für} \quad N \to \infty \tag{5.1}$$

für μ-fast-alle $a \in \mathcal{U}_3$.

Da die Vereinigung abzählbar vieler μ-Nullmengen ebenfalls μ-Maß Null hat, muss für μ-fast-alle a Gleichung (5.1) für alle $h \neq 0$ und alle $\beta \geq 2$, die keine Potenz von 3 sind, erfüllt sein. Damit folgt aus dem Weyl'schen Kriterium (siehe Kapitel 2.2), dass die Folge $a, \beta a, \beta^2 a, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 und daher a normal zur Basis β ist. Daher folgt aus Lemma 5.2.1 sofort die Behauptung des Satzes.

Um Lemma 5.2.1 beweisen zu können, benötigen wir ein zweites Lemma, das wir zuerst zeigen werden:

Lemma 5.2.2 *Sei h eine beliebige ganze Zahl ungleich 0 und $\beta \geq 2$ eine ganze Zahl, die keine Potenz von 3 ist. Dann gilt*

$$\sum_{0 \leq n < N} \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j} h \beta^n \pi)| < C_1 N^{1-\delta_1} \tag{5.2}$$

mit absoluten Konstanten C_1 und δ_1.

Sei β von der Form $3^\tau \beta_1$ mit $\mathrm{ggT}(\beta_1, 3) = 1$. Laut Voraussetzung ist $\beta_1 > 1$ und erfüllt daher die Bedinungen für β in Lemma 5.2.2. Ersetzt man in Gleichung (5.2) β durch β_1, wächst der Ausdruck auf der linken Seite, da

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j} h \beta^n \pi)| = \prod_{j=1-n\tau}^{\infty} |\cos(3^{-j} h \beta_1^n \pi)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j} h \beta_1^n \pi)|$$

ist, und daher genügt es, Lemma 5.2.2 für jene β zu zeigen, die relativ prim zur Zahl 3 sind.

Weiters genügt es, Lemma 5.2.2 für jene β zu zeigen, welche die Gleichung

$$\beta \equiv 1 \pmod 3 \tag{5.3}$$

erfüllen. Um das zu sehen schreiben wir die linke Seite von Gleichung (5.2) als $S(N, h, \beta)$. Dann gilt offenbar

$$S(N, h, \beta) = S\left(\left\lfloor \frac{1}{2}N \right\rfloor, h, \beta^2\right) + S\left(N - \left\lfloor \frac{1}{2}N \right\rfloor, h\beta, \beta^2\right), \tag{5.4}$$

wie sich leicht nachrechnen läßt. In jedem Fall ist $\beta^2 \equiv 1 \pmod 3$. Wenn also Lemma 5.2.2 und somit Ungleichung (5.2) unter Bedingung (5.3) gezeigt ist, also geeignete C_1 und δ_1 gefungen werden können, dann ist das Lemma auch im allgemeinen Fall gültig, indem man C_1 durch $2C_1$ ersetzt.

Wir zeigen Lemma 5.2.2 zuerst für den Fall $N = 3^r$ für ein beliebiges ganzzahliges $r \geq 0$. Wir definieren eine ganze Zahl l durch

$$\begin{cases} \beta \equiv 1 \pmod{3^l} \\ \beta \not\equiv 1 \pmod{3^{l+1}} \end{cases} \tag{5.5}$$

Dann läuft β^n für $0 \leq n < 3^r$ modulo 3^{l+r} durch alle Restklassen, die kongruent 1 modulo 3^l sind. Sei $h = 3^m h'$ mit einem zur Zahl 3 relativ primen h'. Dann läuft $h\beta^n$ für $0 \leq n < 3^r$ modulo 3^{l+m+r} durch alle Restklassen, die modulo 3^{l+m} kongruent h sind. Es nehmen also, wenn $h\beta^n$ von der Form

$$h\beta^n = \sum_{k \geq 0} a_k(n) 3^k \quad \text{mit} \quad a_k(n) = 0, 1 \text{ oder } 2$$

ist, die Koeffizienten

$$a_{l+m}(n), a_{l+m+1}(n), \ldots, a_{l+m+r-1}(n) \tag{5.6}$$

jede von 3^r möglichen Kombinationen von Werten genau einmal an, wenn n von 0 bis $3^r - 1$ läuft.

Wir unterteilen nun die ganzen Zahlen n, für die $0 \leq n < 3^r$ gilt, in zwei verschiedene Klassen, die wir unterschiedlich behandeln. Bezeichne (I) jene n, für welche die Ziffer "1" unter den in (5.6) angegebenen Koeffizienten öfter als $r/6$ mal auftritt, und (II) die restlichen n. Falls $n \in (I)$ ist, dann liegt der Bruchteil $\{3^{-j}h\beta^n\}$ für mehr als $r/6$ Werte von j zwischen 1/3 und 2/3. Dies ist genau für jene Werte j der Fall, für die $a_{j-1}(n) = 1$ ist. Daher ist

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j}h\beta^n\pi)| \leq (\cos\pi/3)^{r/6} \quad \text{für} \quad n \in (I). \tag{5.7}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist dabei genau $3^{-\delta_2 r}$ passendes $\delta_2 > 0$. Da die Menge (I) trivialerweise höchstens 3^r Elemente enthalten kann, ist

$$\sum_{n \in (I)} \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j}h\beta^n\pi)| \leq 3^{(1-\delta_2)r}. \tag{5.8}$$

Nun müssen wir noch Menge (II) behandeln. Wir verwenden dabei die Tatsache, dass die Menge jener Folgen der Form (5.6), die s Elemente gleich "1" enthalten, höchstens

$$3^r e^{-K_1(s-\frac{1}{3}r)^2/r)} \tag{5.9}$$

Elemente enthält, mit einer absoluten Konstanten $K_1 > 0$. Dies läßt sich zum Beispiel problemlos aus Lemma 2.3.4, Seite 14 ableiten (oder siehe G.H. Hardy und E.M. Wright [48]). Für $n \in (II)$ gilt $s \leq r/6$ und daher $(s - \frac{1}{3}r)^2/r \geq r/36$. Indem wir nun alle Werte von (5.9) über $0 \leq s \leq r/6$ summieren, sehen wir dass die Anzahl der n in (II) höchstens

$$\left(\frac{r}{6}+1\right) 3^r e^{-K_1 r/36} \leq C_2\ 3^{(1-\delta_3)r}$$

ist, mit geeigneten, von r unabhängigen Konstanten C_2 und δ_3. Daher ist

$$\sum_{n\in(II)} \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j}h\beta^n\pi)| \leq C_2\ 3^{(1-\delta_3)r} \tag{5.10}$$

Aus (5.8) und (5.10) ergibt sich nun, dass

$$\sum_{0\leq n<3^r} \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j}h\beta^n\pi)| \leq C_3\ 3^{(1-\delta_4)r} \tag{5.11}$$

mit

$$C_3 = 1 + C_2 \quad \text{und} \quad \delta_4 = \min(\delta_2, \delta_3)$$

ist. Somit gilt Gleichung (5.2) für alle N der Form 3^r.

Sei nun N eine beliebige positive natürliche Zahl. N läßt sich also darstellen in der Form

$$N = \sum_{0\leq r\leq R} \eta_r 3^r \quad \text{mit} \quad \eta_r = 0, 1 \text{ oder } 2 \tag{5.12}$$

Wir können die Summation über $0 \leq n \leq N$ in Gleichung (5.2) unterteilen in $\sum_{0\leq r\leq R} \eta_r$ Intervalle vom Typ

$$N_0 \leq n < N_0 + 3^r, \tag{5.13}$$

wovon es je η_r Intervalle mit Länge 3^r gibt. Nun ist aber

$$\sum_{N_0\leq n<N_0+3^r} \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(3^{-j}h\beta^n\pi)| \tag{5.14}$$

eine Summe vom gleichen Typ wie in Ungleichung (5.11), mit $\beta^{N_0}h$ statt h. Wir können daher die Abschätzung in Ungleichung (5.11) anwenden und erhalten, dass die Summe in Gleichung (5.14) höchstens

$$C_3(3^r)^{1-\delta_4} \leq C_3 N^{1-\delta_4}$$

ergibt. Nun ist aber laut Gleichung (5.12)

$$\sum_{0\le r\le R} \eta_r \le K_2(\log N + 1)$$

für eine passende absolute Konstante $K_2 > 0$. Der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (5.2) ist daher höchstens

$$K_2(\log N + 1)C_3N^{1-\delta_4} < C_1N^{1-\delta_1}$$

für passende, von N unabhängige Konstanten $C_1 > 0$ und $\delta_1 > 0$. Damit ist Lemma 5.2.2 gezeigt.

Wir zeigen nun zunächst noch ein weiteres Lemma:

Lemma 5.2.3 *Seien C_1 und δ_1 die Konstanten aus Lemma 5.2.2 sowie $h \neq 0$ und $\beta \ge 2$ beliebige ganze Zahlen. Es ist oBdA.*

$$0 < \delta_1 < 1 < C_1$$

Wir setzen $\delta_1 = 3\Delta$. Dann hat für alle ganzzahligen $N \ge 1$ die Menge jener $a \in \mathcal{U}_3$ mit

$$\left|\sum_{0\le n<N} e^{2\pi i(h\beta^n a)}\right| \ge N^{1-\Delta}$$

ein μ-Maß von höchstens $4C_1N^{-\Delta}$.

Wir verwenden ein Intergral der Form

$$\int_{a\in\mathcal{U}_3} f(a)\; d\mu \tag{5.15}$$

einer Funktion $f(a)$ bezüglich des vorhin eingeführten Maßes μ. Falls $f(x)$ ein Funktion ist, die auf dem gesamten Intervall $0 \le x \le 1$ definiert und auch stetig ist, dann ist

$$\int_{a\in\mathcal{U}_3} f(a)\; d\mu = \lim_{\tau\to\infty} 2^{-\tau} \sum_M f(3^{-\tau}M), \tag{5.16}$$

wobei sich die Summe auf der rechten Seite nur über jene natürlichen Zahlen $M < 3^\tau$ erstreckt, deren Ziffernentwicklung zur Basis 3 niemals die Ziffer "2" enthält. Insbesondere, wenn

$$f(x) = e^{2\pi i\lambda x} \tag{5.17}$$

für beliebiges λ ist, dann gilt

$$\int_{a\in\mathcal{U}_3} e^{2\pi i\lambda a}\; d\mu = \lim_{\tau\to\infty} \prod_{j<\tau}(1 + e^{2\pi i(3^{-j}\lambda)}) = \prod_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(1 + e^{2\pi i(3^{-j}\lambda)})\right).$$

Daher ist

$$\left| \int_{a \in \mathcal{U}_3} e^{2\pi i \lambda a} \, d\mu \right| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos(3^{-j}\lambda\pi)|.$$

Nun ist, für beliebige ganzzahlige $h \neq 0$ und $\beta \geq 2$

$$\begin{aligned} & \int_{a \in \mathcal{U}_3} \left| \sum_{0 \leq n < N} e^{2\pi i (h\beta^n a)} \right|^2 d\mu \qquad (5.18) \\ = & \sum_{0 \leq m < N} \sum_{0 \leq n < N} \int_{a \in \mathcal{U}_3} e^{2\pi i a (h\beta^n - h\beta^m)} \, d\mu \\ \leq & \sum_{0 \leq m < N} \sum_{0 \leq n < N} \prod_{j=0}^{\infty} \left| \cos\left(3^{-j} h (\beta^n - \beta^m)\pi\right) \right| \end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Summe $s = \min(m, n)$ und $r = \max(m, n) - s$, dann ist die rechte Seite sicher nicht größer als

$$2 \sum_{0 \leq r < N} \sum_{0 \leq s < N} \prod_{j=0}^{\infty} \left| \cos\left(3^{-j} h (\beta^r - 1)\beta^s \pi\right) \right|.$$

Für $r \neq 0$ ist die innere Summe laut Lemma 5.2.2 höchstens gleich $C_1 N^{(1-\delta_1)}$. Für $r = 0$ ist dieselbe Summe trivialerweise höchstens gleich N. Daher ist

$$\begin{aligned} & \int_{a \in \mathcal{U}_3} \left| \sum_{0 \leq n < N} e^{2\pi i (h\beta^n a)} \right|^2 d\mu \\ \leq & \; 2N + 2C_1 N^{2-\delta_1} \\ < & \; 4C_1 N^{2-3\Delta}, \end{aligned}$$

da $0 < 3\Delta = \delta_1 < 1 < C_1$ gilt. Damit ist Lemma 5.2.3 offensichtlich wahr.

Nun wollen wir Lemma 5.2.1 aus Lemma 5.2.3 ableiten. Wir setzen

$$N_m = \lfloor e^{\sqrt{m}} \rfloor.$$

Dann gilt trivialerweise

$$\sum_{m=0}^{\infty} N_m^{-\Delta} < \infty.$$

Nun gibt es laut Lemma 5.2.3 für μ-fast-alle a ein $m_0(a)$, so dass

$$\left| \sum_{0 \leq n < N_m} e^{2\pi i (h\beta^n a)} \right| < N_m^{1-\Delta} \quad \text{für alle} \quad m \geq m_0(a) \qquad (5.19)$$

gilt. Andererseits ist, wenn wir $m(N)$ durch die Ungleichung $N_m \leq N < N_{m+1}$ definieren, offensichtlich

$$N - N_{m(N)} = o(N) \tag{5.20}$$

für $N \to \infty$. Da trivialerweise die Gleichung

$$\Big| \sum_{0 \leq n < N} e^{2\pi i (h\beta^n a)} - \sum_{0 \leq n < N_m(N)} e^{2\pi i (h\beta^n a)} \Big| \leq N - N_{m(N)}$$

erfüllt ist, folgt aus (5.19) und (5.20) dass

$$\sum_{0 \leq n < N} e^{2\pi i (h\beta^n a)} = o(N) \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

für μ-fast-alle $a \in \mathcal{U}_3$ ist. Damit ist Lemma 5.2.1 gezeigt, und somit, wie wir bereits erläutert haben, auch Satz 5.2.1 bewiesen. $\square$

Die soeben angegebene Konstruktion kann auf einfache Weise auch auf beliebige andere Basen erweitert werden. So kann damit die Existenz von Zahlen gezeigt werden, die zu allen Basen β, welche sich nicht als Produkt von Potenzen bestimmter Primzahlen schreiben lassen, nicht normal, aber zu allen anderen Basen normal sind. Darauf wollen wir nicht näher eingehen, da im folgenden Kapitel eine noch weiter reichende Konstruktion angegeben wird.

Vorerst wollen wir folgendes festhalten: Es gibt Zahlen, die zu bestimmten Basen normal sind und zu anderen Basen nicht. Insbesondere gibt es Zahlen, die zu mindestens einer Basis normal, aber nicht absolut normal sind.

Ein schönes Beispiel einer solchen Zahl ist etwa auch das folgende: R.G. Stoneham [140] zeigte, dass die Zahl

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} \cdot 5^{-4^n}\right)$$

normal zur Basis 5 ist. Wie nun G. Wagner [151] feststellte, lässt sich aus der Dezimalentwicklung derselben Zahl

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{4^n - n} \cdot 10^{-4^n}\right)$$

sofort erkennen, dass diese Zahl nicht normal zur Basis 10 sein kann (fast alle Nachkommaziffern sind "0", es ist etwa die Summe der ersten 2 Glieder gleich 0.0008000000016384).

5.3 Normalität zu Klassen von Basen

Unabhängig von den im vorigen Kapitel vorgestellten Resultaten J.W.S. Cassels konnte W.M. Schmidt [126] im Jahr 1960 folgende, etwas weiter reichende Aussage beweisen:

Satz 5.3.1 *Sei $r \not\sim s$, also die eine Zahl keine rationale Potenz der anderen. Dann besitzt die Menge der rellen Zahlen, welche normal zur Basis r, aber nicht einfach normal zur Basis s sind, die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Proposition 5.3.1 *Normalität zur Basis r impliziert Normalität zur Basis s genau dann, wenn r eine rationale Potenz von s ist.*

Der Beweis, der dafür von W.M. Schmidt [126] angeführt wird ist recht kompliziert (so wie auch der Beweis des folgenden Satzes), aber etwa M.J. Pelling [109] meint: *I do not know of any simple proof.* Ein anderer Beweis, laut C.E.M. Pearce und M.S. Keane, den Verfassern desselben, ein *structurally simple proof*, findet sich in [108]. Darin wird der vorige Satz aus maßtheoretischen Gesichtspunkten betrachtet und in eine Aussage über schwache Konvergenz von Maßen übersetzt. Ein weiter Beweis stammt von T. Kamae [57], der *cyclic extensions of odometer transformations* und *continuous spectral measures corresponding to them* verwendet.

In diesem Kapitel wollen wir uns allerdings hauptsächlich mit einem Artikel von W.M. Schmidt [127] mit Titel "Über die Normalität von Zahlen zu verschiedenen Basen" aus dem Jahr 1961 beschäftigen. Darin wird der folgende Satz bewiesen, der ein zentrales Resultat in der Theorie normaler Zahlen darstellt. Andere Beweise liefern etwa G. Brown, W. Moran und C.E.M. Pearce [16][17], die Riesz'sche Produktmaße verwenden, oder B. Volkmann [148][149].

Satz 5.3.2 *Gegeben sei eine Einteilung der Zahlen $2, 3, \ldots$ in zwei Klassen S und R mit leerem Schnitt, so dass äquivalente Zahlen stets in derselben Klasse liegen. Dann gibt es reelle Zahlen, die zu allen Basen aus Klasse R normal, aber zu allen Basen aus Klasse S nicht normal sind.*

Dieses Resultat ist in einem gewissen Sinn bestmöglich, denn, wie wir in Kapitel 5.1 gesehen haben, muss eine Zahl a, die zu einer bestimmten Basis normal ist, auch zu allen dazu äquivalenten Basen normal sein. Die von Schmidt [127] angegebene Methode, die wir nun präsentieren werden, gibt nicht nur einen reinen Existenzbeweis, sondern liefert eine explizite Konstruktion der Zahlen mit den gewünschten Eigenschaften.

Bemerkung: In diesem Kapitel bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ stets positive Konstanten, die nur von r und s abhängen.

Seien $r \geq 2$ und $s \geq 2$ zwei feste ganze Zahlen, für die $r \not\sim s$ gilt. Die Primzahlzerlegungen von r und s seien gegeben durch

$$r = p_1^{d_1} \dots p_h^{d_h} \quad \text{bzw.} \quad s = p_1^{e_1} \dots p_h^{e_h} \quad \text{mit} \quad d_i + e_i \neq 0,$$

wobei die auftretenden Primzahlen so indiziert seien, dass

$$\frac{d_1}{e_1} \geq \frac{d_2}{e_2} \geq \dots \geq \frac{d_h}{e_h}$$

gilt (wobei wir $d/0 = +\infty$ annehmen wollen). Wir definieren

$$b = (\max_i \ d_i)(\max_j \ e_j)$$

Weiters konstruieren wir Zahlen l_i, für die $p_i^{2b} \nmid l_i$ gilt. Außerdem seien für $1 \leq i \leq h$ ganze Zahlen u_i und v_i gegeben durch

$$\begin{aligned} u_i &= (p_1^{d_1} \dots p_i^{d_i})^{e_i} (p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i})^{-d_i} \\ v_i &= (p_{i+1}^{e_{i+1}} \dots p_h^{e_h})^{d_i} (p_{i+1}^{d_{i+1}} \dots p_h^{d_h})^{-e_i}, \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck 1 für $i = h$ bedeuten soll. Da $r \not\sim s$ gilt, ist $t_i = u_i/v_i$ nicht gleich 1, und außerdem teilt p_i weder Zähler noch Nenner von t_i.

Nun definieren wir

$$f_i = \begin{cases} p_i - 1 & \text{falls } p_i \text{ ungerade} \\ 2 & \text{falls } p_i = 2 \end{cases}$$

Dann gibt es wohldefinierte ganze Zahlen g_i mit

$$t_i^{f_i} \equiv 1 + q_i p_i^{g_i - 1} \pmod{p_i^{g_i}}$$

(wir müssen uns die Kongruenz mit dem Nenner von $t_i^{f_i}$ erweitert vorstellen), wobei $p_i \nmid q_i$ gilt. Außerdem ist $g_i > 1$ und für $p_i = 2$ gilt sogar $g_i > 2$. Mittels Induktion nach e erhält man, dass

$$t_i^{f_i p_i^e} \equiv 1 + q_i p_i^{g_i - 1 + e} \pmod{p_i^{g_i + e}}$$

für beliebige natürliche Zahlen e gilt. Weil die Ordnung von t_i modulo $p_i^{g_i+e}$ ein Teiler von $f_i p_i^{g_i-1+e}$ ist, muss sie ein Vielfaches von p_i^e sein.

Wenn für eine natürliche Zahl $k \geq g_i$ der Wert n ein Vertretersystem modulo p_i^k durchläuft liegen höchstens $p_i^{2b} p_i^{g_i}$ der Zahlen $t_i^n l_i$ in derselben Restklasse modulo p_i^k. Falls $p_i \mid s$ gilt, dann enthält ein Repräsentantensystem modulo s^k genau $\left(\frac{s}{p_i}\right)^k$ und somit höchstens $\left(\frac{s}{2}\right)^k$ Elemente, welche modulo p_i^k kongruent sind. Wir setzen $\alpha_1 = \max(g_1, \dots, g_h)$ und erhalten damit folgendes Lemma:

Lemma 5.3.1 *Sei $k \geq \alpha_1$ und $e_i > 0$. Läuft n durch ein Vertretersystem modulo s^k, dann liegen höchstens $\alpha_2\left(\frac{s}{2}\right)^k$ der Zahlen $l_i t_i^n$ in derselben Restklasse modulo s^k.*

Wir nennen ein Ziffernpaar zur Basis s "brav", wenn nicht beide Ziffern gleich 0 oder beide gleich $s-1$ sind. Unter den "Ziffernpaaren einer natürlichen Zahl x" (zur Basis s) verstehen wir, wenn $x = (c_k c_{k-1} \dots c_0)_s$ ist, die Paare $0c_k, c_k c_{k-1}, \dots, c_2 c_1$.

Das folgende Lemma stammt aus einem älteren Artikel von W.M. Schmidt [126], wo sich auch der hier widergegebene Beweis desselben findet:

Lemma 5.3.2 *Sei $k \geq \alpha_3$. Die Anzahl der natürlichen Zahlen x, für die $x < s^k$ gilt und die weniger als $\alpha_4 k$ brave Ziffernpaare besitzen, ist höchstens gleich $2^{3k/4}$.*

Beweis: Um dieses Lemma zu beweisen genügt es, jene Ziffernpaare $c_{i+1}c_i$ zu betrachten, für die $i \equiv 1 \pmod 2$ gilt. Wir zeigen dass es höchstens $2^{3k/4}$ Zahlen $x < s^k$ gibt, welche maximal $\alpha_4 k$ solcher Ziffernpaare besitzen, die brav sind. Wir nehmen zuerst an, dass k gerade sei. Dann gibt es

$$\binom{\frac{k}{2}}{l}(s^2-2)^l 2^{k/2-l}$$

Zahlen $c_k \dots c_1$, die genau l brave Zahlenpaare $c_{i+1}c_i$ mit $i \equiv 1 \pmod 2$ besitzen. Daher ist die Anzahl jener Zahlen, die weniger als $\alpha_4 k$ brave Zahlenpaare $c_{i+1}c_i$ mit $i \equiv 1 \pmod 2$ besitzen, nicht größer als

$$k\binom{\frac{k}{2}}{\lfloor \alpha_4 k \rfloor}(s^2-2)^{\lfloor \alpha_4 k \rfloor} 2^{(k/2)-\lfloor \alpha_4 k \rfloor}.$$

Unter Verwendung der Stirling'schen Formel für die Binomialkoeffizienten führt das, für hinreichnd großes k, auf

$$\alpha_{4'} k \frac{(s^2-2)^{\alpha_4 k} 2^{((1/2)-\alpha_4)k}}{(2\alpha_4)^{\alpha_4 k}(1-2\alpha_4)^{((1/2)-\alpha_4)k}} < 2^{(3/4)k}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist sogar $< 2^{\alpha_{4''} k}$ mit $\alpha_{4''} < 3/4$. Daher können wir die Ungleichung auch auf ungerade k erweitern und das Lemma ist bewiesen. □

Damit zeigen wir ein weiteres Lemma:

Lemma 5.3.3 *Es sei eine natürliche Zahl N gegeben, so dass die Zahlen*

$$l_i, l_i t_i, \dots, l_i t_i^{N-1} \tag{5.21}$$

ganz sind, und e_i sei positiv. Dann besitzen alle bis auf höchstens $N^{1-\alpha_5}$ dieser Zahlen mindestens $\alpha_6 \log N$ brave Ziffernpaare.

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass $N \geq s^{\alpha_1}$ und $N \geq s^{\alpha_3+1}$ gilt. Wir wählen k so, dass $s^k \leq N < s^{k+1}$ ist. Damit können wir $0 < x \leq N-1$ in s Teilintervalle unterteilen, von denen keines mehr als s^k ganze Zahlen enthält. Es ergibt sich die Schranke

$$\alpha_2(s/2)^k s 2^{(3/4)k} < \alpha_7 N^{1-\alpha_5}$$

für die Anzahl der Zahlen in (5.21), die weniger als $\alpha_6 \log N < \alpha_4 k$ brave Ziffernpaare besitzen. Indem wir α_5 und α_6 klein genug wählen, können wir $\alpha_7 = 1$ setzen und erhalten damit Lemma 5.3.3. □

Lemma 5.3.4 *Sei $l > 1$ eine ganze Zahl. Dann besitzen maximal $N^{1-\alpha_8}$ der ersten N Zahlen der Folge*

$$l, lr, lr^2, \ldots \tag{5.22}$$

weniger als $\alpha_9 \log N$ brave Ziffernpaare. α_8 und α_9 sind dabei von l unabhängig.

Beweis: Es bezeichne $z(x)$ die Anzahl der braven Ziffernpaare einer natürlichen Zahl x. Es ist offenbar $z(sx) \geq z(x)$. Daher können wir, wenn wir untere Schranken für $z(x)$ angeben wollen, alle Faktoren s von x abspalten. Insebesondere können wir annehmen, dass $s \nmid l$ gilt.
Dann gibt es ein i mit $1 \leq i \leq h$, für das $p_i \mid s$ und $p_i^b \nmid l$ gelten. Wir bezeichnen die größte Zahl mit dieser Eigenschaft mit i_1 und setzen $l_{i_1} = l$. Wegen $p_i \mid s$ gilt auch $p_{i+1} \mid s, \ldots, p_h \mid s$ und daher $p_{i+1}^b \nmid l, \ldots, p_h^b \nmid l$. Daraus folgt $v_{i_1} \mid l_{i_1}$.

Daher ist $l_{i_1} t_{i_1}$ eine ganze Zahl. Falls auch $l_{i_1} t_{i_1}^n$ eine ganze Zahl ist, dann ist $l_{i_1} r^{ne_{i_1}} = l_{i_1}(t_{i_1} s^{d_{i_1}})^n$, und wir können $l_{i_1} r^{ne_{i_1}}$ durch $l_{i_1} t_{i_1}^n$ ersetzen.

Es ist entweder $l_{i_1} t_{i_1}^n$ eine ganze Zahl für alle $n \in \mathbb{N}$ (z.B. wenn $i_1 = h$ ist), oder es gibt ein maximales n mit dieser Eigenschaft, das wir dann mit n_1 bezeichnen. Im ersten Fall ersetzen wir die in (5.22) angegebene Folge durch

$$l_{i_1}, l_{i_1} r, \ldots, l_{i_1} r^{e_{i_1}-1}, l_{i_1} t_{i_1}, l_{i_1} t_{i_1} r, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}^2, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}^3, \ldots$$

und im zweiten Fall durch

$$l_{i_1}, l_{i_1} r, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}^{n_1}, l_{i_1} t_{i_1}^{n_1} r, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}^{n_1} r^2, \ldots$$

Im zweiten Fall bezeichne i_2 die größte natürliche Zahl, für die $p_{i_2}^b \nmid l_{i_1} t_{i_1}^{n_1}$ gilt. Es ist offenbar $i_2 > i_1$, denn sonst wäre $l_{i_1} t_{i_1}^{n_1+1}$ eine ganze Zahl. Wir setzen $l_{i_2} = l_{i_1} t_{i_1}^{n_1}$ und behandeln nun die Folge $l_{i_2}, l_{i_2} r, l_{i_2} r^2, \ldots$ genauso, wie wir die ursprüngliche Folge (5.22) behandelt haben.

Wenn wir diese Vorgehensweise weiter wiederholen, muss wegen $i_1 < i_2 < \cdots \leq h$ irgendwann ein maximales i_g erreicht sein, für das dann die Werte $l_{i_g} t_{i_g}^n$ für alle n eine ganze Zahl ergeben. Wenn wir daher die Folge (5.22) durch

$$\begin{array}{l} l_{i_1}, l_{i_1} r, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}^2, \ldots, l_{i_1} t_{i_1}^{n_1 - 1} r^{e_{i_1} - 1} \\ l_{i_2}, l_{i_2} r, \ldots, l_{i_2} t_{i_2}, \ldots, l_{i_2} t_{i_2}^2, \ldots, l_{i_2} t_{i_2}^{n_2 - 1} r^{e_{i_2} - 1} \\ \vdots \\ l_{i_g}, l_{i_g} r, \ldots, l_{i_g} t_{i_g}, \ldots, l_{i_g} t_{i_g}^2, \ldots, l_{i_g} t_{i_g}^3, \ldots \end{array}$$

ersetzen, erhalten wir ein Schema mit höchstens h Zeilen, weshalb es zu zeigen genügt, dass es unter den ersten N Gliedern einer Zeile (oder unter allen, falls in der Zeile weniger als N Zahlen stehen) höchstens $N^{1-\alpha_{10}}$ gibt, die weniger als $\alpha_{11} \log N$ brave Zahlenpaare besitzen.

Wenn wir etwa die Reihe

$$l_i, l_i r, \ldots l_i r^{e_i - 1}, l_i t_i, l_i t_i r, \ldots$$

betrachten, besteht diese aus e_i und daher höchstens b (endlichen oder unendlichen) Folgen der Gestalt

$$l_i r^u, l_i r^u t_i, l_i^u t_i^2, \ldots \quad \text{für} \quad 0 \leq u < e_i.$$

Wir setzen $L_i = l_i r^u$ und bemerken, dass $p_i^{2b} \nmid L_i$ gilt. Wir müssen nun zeigen, dass es unter den ersten N Gliedern (bzw. allen Gliedern) der Folge

$$L_i, L_i t_i, L_i t_i^2, \ldots \tag{5.23}$$

höchstens $N^{1-\alpha_{12}}$ gibt, die weniger als $\alpha_{13} \log N$ brave Ziffernpaare besitzen. Wenn die Anzahl der Glieder in (5.23) kleiner als $\sqrt{N}$ ist, dann gilt dies tivialerweise. Wenn die Anzahl der Glieder mindestens gleich $\sqrt{N}$ ist, dann wenden wir Lemma 5.3.3 an, mit L_i an Stelle von l_i, und sehen dass höchstens $N^{1-\alpha_5}$ Glieder weniger als $\alpha_6 \log \sqrt{N} = \alpha_{13} \log N$ brave Zahlenpaare besitzen. Damit ist Lemma 5.3.4 bewiesen. □

Sei K eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $z_K(x)$ als die Anzahl jener braven Zahlenpaare $c_{i+1} c_i$ von x, für die $i \geq K$ gilt.

Lemma 5.3.5 *Sei $l \geq s^K$. Dann gibt es unter den Zahlen*

$$l, lr, \ldots, lr^{N-1}$$

höchstens $N^{1-\alpha_{14}}$, für die z_K einen Wert kleiner als $\alpha_1 5 \log N$ ergibt, wobei α_{14} und α_{15} von l und K unabhängig sind.

Beweis: Wir können uns auf jene Zahlen lr^n mit $N^{2/3}\log s/\log r \leq n < N$ beschränken. Wir unterteilen dieses Intervall in Teilintervalle der Länge $\lfloor N^{1/3}\rfloor$, und, falls notwendig, ein kleineres Intervall.

Die Anzahl dieser Teilintervalle ist höchstens gleich $(N/\lfloor N^{1/3}\rfloor)+1$ und daher für ausreichend großes N kleiner als $2N^{2/3}$. Wenn wir zeigen können, dass für nicht mehr als $\lfloor N^{1/3}\rfloor^{1-\alpha_{16}}$ Zahlen in einem Teilintervall $z_K(lr^n) < \alpha_{17}\log\lfloor N^{1/3}\rfloor$ gilt, dann gibt es im Intervall $N^{2/3}\log s/\log r \leq n < N$ höchstens $2N^{2/3}N^{(1-\alpha_{16})/3} = 2N^{1-\alpha_{18}}$ Zahlen, für die $z_K(lr^n) < \alpha_{19}\log N < \alpha_{17}\log\lfloor N^{1/3}\rfloor$ gilt. Wenn wir dann, falls nötig, α_{18} und α_{19} verkleinern, können wir den Faktor 2 vermeiden und erhalten Lemma 5.3.5.

Wir müssen also nur noch die obige Behauptung für die Teilintervalle beweisen. Sei das Teilintervall etwa $n_0 \leq n < n_0+\lfloor N^{1/3}\rfloor$, dann haben wir, wenn wir $l' = lr^{n_0}$ setzen, dieselbe Behauptung wie im Lemma selbst, allerdings mit l' statt l und $\lfloor N^{1/3}\rfloor$ statt N und den stärkeren Voraussetzungen $l' \geq s^K r^{n_0} \geq s^{K+N^{2/3}} \geq s^{K+\lfloor N^{1/3}\rfloor^2}$. Daher genügt es, das ursprüngliche Lemma unter der Voraussetzung $l \geq s^{K+N^2}$ zu zeigen.

Wir können dabei annehmen, dass es im Bereich $0 \leq n < N$ ein n mit $z_k(lr^n) < \alpha_{15}\log N$ gibt. Die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir mit n_1. Dann genügt es, die Behauptung für $l^* = lr^{n_1}$ an Stelle von l zu zeigen. Wir können daher $z_k(l) < \alpha_{15}\log N$ voraussetzen.

Da l mindestens N^2 Ziffern c_i besitzt, deren Index mindestens gleich K ist, und weil $z_K(l) < \alpha_{15}\log N$ ist, muss es einen Block mit mindestens $h = \lfloor (N^2-1)/\alpha_{15}\log N\rfloor - 1$ nicht braven Ziffernpaaren

$$c_{i+h}c_{i+h-1},\ldots,c_{i+1}c_i \quad \text{mit} \quad i \geq K$$

in der Entwicklung von l geben. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

a) $c_{i+h} = \cdots = c_i = 0$. Dann gibt es eine ganze Zahl $\bar{l}$, sodass

$$l = \bar{l}s^{i+h+1} + R \quad \text{mit} \quad 0 \leq R < s^i$$

ist. Wegen $0 \leq R < s^i$ ist $0 \leq Rr^N < s^i s^{N\log_s r} < s^{i+h}$ für hinreichend großes N. Dann gilt aber für jedes $n < N$

$$z_K(lr^n) \geq z_K(\bar{l}s^{i+h+1}r^n) \geq z_K(\bar{l}r^n)$$

Laut Lemma 5.3.4 ist $z(\bar{l}r^n) \geq \alpha_9\log N$ mit maximal $N^{1-\alpha_8}$ Ausnahmen. Da wir durch Verkleinern der Konstante α_9 kleinere Werte von N miteinschließen können, folgt Lemma 5.3.5.

b) $c_{i+h} = \cdots = c_i = s-1$. Dann gibt es eine ganze Zahl $\bar{\bar{l}}$, sodass

$$l = \bar{\bar{l}} s^{i+h+1} - R \quad \text{mit} \quad 0 < R \leq s^i$$

ist.
Wenn wir

$$z_K(lr^n) \geq z_K(\bar{\bar{l}} s^{i+h+1} r^n) - 2 \tag{5.24}$$

gezeigt haben, lässt sich wie in a) fortfahren, denn der Wert -2 auf der rechten Seite lässt sich durch kleinere Wahl der Konstanten "verschlucken". Um (5.24) zu beweisen, betrachten wir die Entwicklung von $\bar{\bar{l}} s^{i+h+1} r^n$:

$$d_g \ldots d_j \ldots d_{i+h+1} 00 \ldots 0 \tag{5.25}$$

und setzen j für die kleinste Zahl, für die $d_j \neq 0$ ist. Wenn wir nun Rr^n mit $n < N$ von (5.25) abziehen erhalten wir eine Zahl, die immer noch die Ziffern $d_g \ldots d_{j+1}$ besitzt. Daher verlieren wir maximal zwei brave Ziffernpaare und (5.24) ist bewiesen. □

Lemma 5.3.6 *Seien K und l natürliche Zahlen und $l \geq s^K$. Dann ist*

$$\sum_{r=0}^{N-1} \prod_{k=K+1}^{\infty} |\cos(\pi r^n l / s^k)| \leq 2N^{1-\alpha_{20}}. \tag{5.26}$$

Beweis: Falls x ein braves Ziffernpaar $c_{k-1}c_{k-2}$ besitzt, dann ist $|\cos(\pi x/s^k)| \leq |\cos(\pi/s^2)| = \alpha_{21} < 1$. Laut Lemma (5.3.5) sind alle bis auf maximal $N^{1-\alpha_{14}}$ Glieder der Summe (5.26) höchstens gleich $\alpha_{21}^{\alpha_{15}\log N} < N^{-\alpha_{22}}$. Daher ergibt sich die Schranke $N^{1-\alpha_{14}} + N^{1-\alpha_{22}} < 2N^{1-\alpha_{20}}$ für diese Summe. □

Nun wollen wir eine Menge σ auf folgende Weise konstruieren:
Sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen größer als 2, so dass $s_m \leq ms_1$ gilt. Wir definieren

$$\langle m \rangle = \lceil e^{\sqrt{m}} + 2s_1 m^3 \rceil \quad \text{und} \quad \langle m; x \rangle = \lceil < m > / \log x \rceil$$

für natürliche Zahlen m und x mit $x > 1$. Es ergeben sich die Abschätzungen

$$x^{\langle m;x \rangle - 1} < e^{\langle m \rangle} \leq x^{\langle m;x \rangle} \tag{5.27}$$

und

$$\langle m+1 \rangle - \langle m \rangle \geq 6s_1 m^2. \tag{5.28}$$

Wir definieren weiters $h(m)$ als die kleinste Zahl h, die

$$m \not\equiv 0 \pmod{2^h}$$

erfüllt. Außerdem führen wir die Abkürzungen $s(m) = s_{h(m)}$, $a_m = \langle m; s(m)\rangle$ und $b_m = \langle m+1; s(m)\rangle$ ein. Für $n \geq m$ und $s = s(m)$ ist

$$\begin{aligned} & \langle n+2; s\rangle + \langle n; s\rangle - 2\langle n+1; s\rangle \\ \geq\; & \Big(2s_1\big((n+2)^3 + n^3 - 2(n+1)^3\big)/\log s\Big) - 4 \\ \geq\; & \big(2s_1(6n+6)/s_1 n\big) - 4 > 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Zu einer reellen Zahl λ schreiben wir $\eta_m(\lambda)$ für die kleinste Zahl

$$\eta = gs(m)^{-a_m} \quad \text{mit } g \text{ ganz,}$$

für die $\lambda \leq \eta$ gilt. Wir bezeichnen mit $\sigma_m(\lambda)$ die Menge der Zahlen

$$\eta_m(\lambda) + c_{a_m+1}^{s(m)} s(m)^{-a_m-1} + \cdots + c_{b_m-2}^{s(m)} s(m)^{-b_m+2} \tag{5.30}$$

mit Koeffizienten $c_i^{s(m)}$ gleich 0 oder 1.

Sei nun $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, für die

$$\xi_m \in \sigma_m(\xi_{m-1}) \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{5.31}$$

gilt. Dann gelten die Ungleichungen

$$\xi_{m-1} \leq \eta_m(\xi_{m-1}) \leq \xi_m \leq \eta_m(\xi_{m-1}) + s(m)^{-a_m} \leq \xi_{m-1} + 2s(m)^{-a_m}.$$

Durch mehrmaliges Anwenden von Ungleichung (5.27) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{u=m+1}^{\infty} s(u)^{-a_u} &\leq \sum_{u=m+1}^{\infty} e^{-\langle u\rangle} \\ &\leq e^{-\langle m+1\rangle}(1 + e^{-2} + e^{-4} + \ldots) \\ &< \frac{3}{2} e^{-\langle m+1\rangle} < \frac{3}{2} s(m)^{-b_m+1} \\ &\leq \frac{1}{2} s(m)^{-b_m+2}. \end{aligned}$$

Daher besitzt die Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ einen Grenzwert ξ, der die Ungleichung

$$\xi_m \leq \xi < \xi_m + s(m)^{-b_m+2} \tag{5.32}$$

erfüllt.

Die Menge, welche alle auf solche Weise erhaltbaren Zahlen ξ enthält, bezeichnen wir mit σ. Es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Folgen der Form

$$c_{a_1+1}^{s(1)}, \ldots, c_{b_1-2}^{s(1)}, c_{a_2+1}^{s(2)}, \ldots, c_{b_2-2}^{s(2)}, c_{a_3+1}^{s(3)}, \ldots, \tag{5.33}$$

von Ziffern gleich "0" oder "1", und den Zahlen ξ aus σ. Dieser Zusammenhang ist eindeutig, denn eine auf diese Weise konstruierte Zahl ξ hat die Ziffern

$$c_{a_m+1}^{s(1)}, \dots, c_{b_m-2}^{s(m)} \tag{5.34}$$

in der Entwicklung

$$\xi = \lfloor \xi \rfloor + 0.c_1^s c_2^s \dots$$

zur Basis $s(m)$, wie aus Ungleichung (5.32) und der Tatsache, dass die Entwicklung von ξ_m zur Basis $s(m)$ mit den Ziffern (5.34) abbricht, folgt.

Lemma 5.3.7 *Jede Zahl aus σ ist nicht normal zu jeder der Basen $s_1, s_2, \dots$.*

Beweis: Sei h fest und $s = s_h$. Weiters sei q so groß, dass

$$(2/s)^q < 2^{-h} \tag{5.35}$$

gilt.
Außerdem sei $\xi \in \sigma$ und $h(m) = h$. Dann sind die Ziffern (5.34) in der Entwicklung von ξ zur Basis s gleich "0" oder "1". Zu einer Zahl M mit $h(M) = h$ existieren mindestens

$$\sum_{m \le M,\ h(m)=h} (b_m - a_m - 1 - q) \tag{5.36}$$

q-stellige Blöcke $c_{i+1}^s \dots c_{i+q}^s$ mit Ziffern "0" oder "1" in der Entwicklung von ξ, sodass $i + q \le b_M - 2$ ist. Nun ist $h(m) = h$ genau dann, wenn $m \equiv 2^{h-1} \pmod{2^h}$ ist. Insbesondere ist $s(2^{h-1}) = s_h$. Ist $h(m) = h$ und $m > 2^{h-1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} & b_m - a_m - 1 - q \\ = \ & \langle m+1; s\rangle - \langle m; s\rangle - 1 - q \\ \le \ & 2^{-h} \sum_{j=m-2^h+1}^{m} (\langle j+1; s\rangle - \langle j; s\rangle - 1 - q), \end{aligned}$$

weil $\langle m+1; s\rangle - \langle m; s\rangle$ wegen (5.29) für $m > 2^{h-1}$ eine wachsende Funktion in m ist.

Die Summe in (5.36) ist also mindestens gleich

$$2^{-h}\big(\langle M+1; s\rangle - \langle 2^{h-1}+1; s\rangle - M(1+q)\big) = 2^{-h} b_M\big(1 + o(M)\big)$$

Wenn ξ normal zur Basis $s = s_h$ wäre, dann wäre die Auswahl an q-stelligen Ziffernblöcken, bestehend aus den Ziffern "0" und "1" und mit Indizes kleiner als b_M, asymptotisch gleich $(2/s)^q b_M$, was wegen (5.35) unmöglich ist.

Nun wollen wir eine Zahl ξ explizit konstruieren. Seien dazu zwei Klasseneinteilungen R und S gegeben, welche den Bedingungen von Satzes 5.3.2 genügen, sodass also äquivalente Zahlen stets in derselben Klasse liegen. Durch die vorhergehenden Hilfssätze ist der Satz für den Fall $R = \emptyset$ bewiesen. Wir können jetzt also von $R \neq \emptyset$ ausgehen.

Wir wählen eine Folge $r_1, r_2, \ldots$ von Elementen aus R, so dass jedes $r \in R$ zu mindestens einem r_i äquivalent ist. Entsprechend bilden wir auch eine Folge $s_1, s_2, \ldots$ von Elementen aus S, wobei wir zusätzlich $s_i > 2$ voraussetzen. Es genügt nun, eine Zahl ξ zu konstruieren, die zu allen Basen $r_1, r_2, \ldots$ normal, zu allen Basen $s_1, s_2, \ldots$ hingegen nicht normal ist.
β_i, γ_i und δ_i bezeichnen positive Konstanten, die ausschließlich von den Folgen $r_1, r_2, \ldots$ und $s_1, s_2, \ldots$ abhängen. Insbesondere sei $\beta_{ij} = \alpha_{20}(r_i, s_j)$ für $i, j = 1, 2, \ldots$, wobei α_{20} die Konstante aus Lemma 5.3.6 bedeutet. Weiters sei $\beta_k = \min_{1 \leq i,j \leq k} \beta_{ij}$ und $\gamma_k = \max(r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k)$. Wir dürfen $\beta_k < 1/2$ annehmen.

Wir setzen $\phi(1) = 1$ und bezeichnen mit $\phi(i)$ die größte ganze Zahl ϕ, für die

$$\phi \leq \phi(k-1) + 1, \quad \beta_\phi \geq \beta_1 k^{-1/4} \quad \text{und} \quad \gamma_\phi \leq \gamma_1 k$$

gilt. Damit ist $\phi_1, \phi_2, \ldots$ eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, in der jede natürliche Zahl enthalten ist.
Wenn wir $r_i' = r_{\phi(i)}$ und $s_i' = s_{\phi(i)}$ setzen, dann haben die r_i' bzw. s_i' dieselben Eigenschaften wie die r_i bzw. s_i, und zusätzlich ist $\beta_k' \geq \beta_1' k^{-1/4}$ und $\gamma_k' \leq \gamma_1' k$. Wir dürfen also annehmen, dass die ursprünglichen Folgen die Bedingungen

$$\beta_k \geq \beta_1 k^{-1/4} \quad \text{und} \quad \gamma_k \leq \gamma_1 k \tag{5.37}$$

erfüllen.

Wir setzen nun $\xi_0 = 0$ und konstruieren induktiv eine Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$. Zu gegebenem ξ_{m-1} sei ξ_m jene Zahl in $\sigma_m(\xi_{m-1})$, für welche die Funktion

$$A_m(x) = \sum_{t=-m,\ t\neq 0}^{m} \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=\langle m;r_i\rangle+1}^{\langle m+1;r_i\rangle} e(r_i^j tx) \right|^2 \tag{5.38}$$

den kleinstmöglichen Wert annimmt (wir verwenden dabei die Abkürzung $e(x) = e^{2\pi i x}$). Falls es mehrere Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt, dann sei ξ_m etwa die kleinste. Diese Folge erfüllt (5.31) und besitzt daher einen Grenzwert ξ, der zu keiner der Basen $s_1, s_2, \ldots$ normal ist.

Lemma 5.3.8 *Es gilt*

$$A_m(\xi) \leq \delta_1 m^2 (\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{2-\beta_m}.$$

Beweis:

$$A_m(x) = \sum_{t=-m,\ t\neq 0}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=\langle m;r_i\rangle+1}^{\langle m+1;r_i\rangle} \sum_{g=\langle m;r_i\rangle+1}^{\langle m+1;r_i\rangle} e\big((r_i^j - r_i^g)tx\big). \tag{5.39}$$

Wir schreiben nun $B_m(x)$ für jenen Teil der Summe, für den entweder $|j-g| < m$ oder j oder g mindestens gleich $\langle m+1; r_i\rangle - m$ ist, und wir schreiben C_m für den restlichen Teil. Mit Ungleichung (5.28) ergibt sich die triviale Abschätzung

$$\begin{aligned} B_m(x) &\leq 10m^2 \sum_{i=1}^{m} \big(\langle m+1; r_i\rangle - \langle m; r_i\rangle\big) \\ &\leq \delta_2 m^3 \big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big) \\ &\leq \delta_3 m^2 \big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big)^{2-\beta_m}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Wenn wir den Mittelwert einer Funktion $f(x)$ in $\sigma_m(\xi_{m-1})$ mit μf bezeichnen, dann ist $A_m(\xi_m) \leq \mu A_m$ und deshalb

$$\begin{aligned} A_m(\xi) &= B_m(\xi) + C_m(\xi) - B_m(\xi_m) - C_m(\xi_m) + A_m(\xi_m) \\ &\leq B_m(\xi) - B_m(\xi_m) + \mu B_m + C_m(\xi) - C_m(\xi_m) + \mu C_m. \end{aligned}$$

Die ersten drei Summanden in der unteren Zeile können nun mittels Ungleichung (5.40) abgeschätzt werden. Die anderen drei Summanden lassen sich mittels der folgenden, für $m \geq \delta_4$ geltenden Ungleichung abschätzen:

$$\begin{aligned} r^{\langle m+1;r\rangle - m} m s(m)^{-\langle m+1; s(m)\rangle + 2} &\leq e^{\langle m+1\rangle} r^{1-m} m e^{-\langle m+1\rangle} s^2(m) \\ &\leq 2^{1-m} m s^2(m) \\ &\leq 1/2. \end{aligned}$$

Wir setzen $L_g = (r^g - 1) r^{\langle m+1;r\rangle - m - g} t(\xi - \xi_m)$ und stellen fest, dass

$$|L_g| \leq r^{\langle m+1;r\rangle - m} m s(m)^{-\langle m+1; s(m)\rangle + 2} \leq 1/2$$

ist. Der Teil des Ausdruckes für $C_m(\xi) - C_m(\xi_m)$, für den t und $r_i = r$ in (5.39) fest bleiben, ist maximal gleich

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{g=1}^{\langle m+1;r\rangle - \langle m;r\rangle - m} \sum_{j=1}^{\langle m+1;r\rangle - \langle m;r\rangle - m - g} |e(L_g r^{-j}) - 1| \\ \leq\ & 2 \sum_{g=1}^{\langle m+1;r\rangle - \langle m;r\rangle - m} \sum_{j=1}^{\infty} r^{-j} \\ <\ & 2\big(\langle m+1; r\rangle - \langle m; r\rangle\big). \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise wie bei der Abschätzung von $B_m(x)$ erhalten wir so

$$C_m(\xi) - C_m(\xi_m) \le \delta_5 m^2 \big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big)^{2-\beta_m}.$$

Wenn wir nun $f(x)$ für die Funktion $e(tx) = e^{2\pi itx}$ schreiben, erhalten wir

$$|\mu f| = \big|e\big(t\eta_m(\xi_{m-1})\big)\big| \prod_{k=a_m+1}^{b_m-2} \Big|\Big(1+e\big(ts(m)^{-k}\big)\Big)/2\Big| = \prod_{k=a_m+1}^{b_m-2} \big|\cos\big(\pi ts(m)^{-k}\big)\big|$$

und somit

$$\begin{aligned} |\mu C_m| \quad \le \quad 2 & \sum_{t=-m,\ t\neq 0}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{g=m}^{\langle m+1;r_i\rangle-\langle m;r_i\rangle-m} \sum_{j=1}^{\langle m+1;r_i\rangle-\langle m;r_i\rangle-m-g} \prod_{k=a_m+1}^{b_m-2} \\ & \big|\cos\big(\pi(r^g-1)r^{\langle m;r_i\rangle}r^j ts(m)^{-k}\big)\big|. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Halten wir nun $t, r_i = r$ und g fest und schreiben wir $L = (r^g-1)r^{\langle m;r\rangle}t$, dann ist die innere Summe gleich

$$\sum_{j=1}^{\langle m+1;r\rangle-\langle m;r\rangle-m-g} \sum_{k=a_m+1}^{b_m-2} |\cos(\pi Lr^j/s^k)|. \tag{5.42}$$

Es ist

$$Lr^j/s^{\langle m+1;s(m)\rangle-2} \le r^{\langle m+1;r\rangle-m} s^{-\langle m+1;s(m)\rangle+2} \le 1/2$$

und daher

$$\prod_{k=b_m-1}^{\infty} |\cos(\pi Lr^j/s^k)| \ge \prod_{k=1}^{\infty} |\cos(\pi/2^{k+1})| = \delta_6 > 0.$$

Deshalb ist Summe (5.42) höchstens gleich

$$\delta_7 \sum_{j=1}^{\langle m+1;r\rangle-\langle m;r\rangle-m-g} \prod_{k=a_m+1}^{\infty} |\cos(\pi Lr^j/s^k)|.$$

Wegen

$$\begin{aligned} |L| \quad &\ge \quad (r^m-1)r^{\langle m;r\rangle} \ge (2^m-1)e^{\langle m\rangle} \\ &> \quad (2^m-1)s(m)^{\langle m;s(m)\rangle-1} \\ &= \quad s^{a_m+1}(2^m-1)s^{-2} \\ &> \quad s^{a_m+1} \end{aligned}$$

für $m > \delta_4$ dürfen wir Lemma 5.3.6 anwenden und sehen, dass der Wert von (5.42) höchstens gleich

$$2\delta_7\big(\langle m+1;r\rangle - \langle m;r\rangle\big)^{1-\alpha_{20}(r,s)}$$

ist.
Daher ergibt sich

$$\mu C_m \leq \delta_8 m^2 \big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big)^{2-\beta_m},$$

und somit ist unter Berücksichtigung der ähnlichen Ungleichungen für B_m und $C_m(\xi) - C_m(\xi_m)$ das Lemma bewiesen. $\square$

Lemma 5.3.9 *ξ ist normal zu jeder der Basen $r_1, r_2, \ldots$*

Beweis: Seien $r = r_h$ und $t \neq 0$ fest. Weiters sei $m \geq h$ und $m \geq |t|$. Aus Lemma 5.3.8 folgt

$$\Big|\sum_{j=\langle m;r\rangle}^{\langle m+1;r\rangle} e(r^j t\xi)\Big| \leq \delta_9 m \big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big)^{1-\beta_m/2}.$$

Wir bilden nun

$$\sum\nolimits_M = \sum_{m=1}^{M-1} m\big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big)^{1-\beta_m/2} \leq M \sum_{m=1}^{M-1} \big(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle\big)^{1-\beta_M/2}.$$

Unter Benützung der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^s \leq M\Big(\sum_{i=1}^{M} a_i/M\Big)^s < M\Big(\sum_{i=1}^{M} a_i\Big)^s$$

erhalten wir

$$\sum\nolimits_M \leq M^2 \langle M\rangle^{1-\beta_M/2} = \mathcal{O}(M^2 e^{\sqrt{M}(1-\delta_{10}M^{-1/4})} = o\big(\langle M\rangle\big) = o\big(\langle M;r\rangle\big).$$

Da auch

$$\langle M+1;r\rangle - \langle M;r\rangle = o\big(\langle M;r\rangle\big)$$

ist, gilt

$$\sum_{j=1}^{N} e(r^j t\xi) = o(N)$$

für jedes ganze $t \neq 0$. Nach dem Weyl'schen Kriterium (siehe Kapitel 2.2 und 2.4) ist daher die Folge $\xi, \xi r, \xi r^2, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 und deshalb die Zahl ξ normal zur Basis r. $\square$

Dem hier gegebenen Beweis folgend lassen sich auch Zahlen ξ mit den gewünschten Eigenschaften explizit konstruieren, wozu das Berechnen einiger der angeführten Konstanten, etwa von Konstante $\alpha_{20}(r,s)$ aus Lemma 5.3.6, notwendig ist.

Die Menge $M(R,S)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums, wie sich folgendermaßen sehen lässt: Wir konstruieren überabzählbar viele Folgen $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \dots,$ indem wir für gegebenes ξ_{m-1} als ξ_m eine Zahl aus $\sigma_m(\xi_{m-1})$ wählen, für die $A_m(x)$ den kleinsten oder den zweitkleinsten Wert annimmt. Jeder Grenzwert einer solchen Folge liegt in $M(R,S)$.
Da die Menge aller Klasseneinteilungen R,S ebenfalls kontinuierliche Mächtigkeit hat, ergibt sich damit übrigens eine *nette*, aber *freilich komplizierte* (wie Schmidt [127] meint) Illustration der Gleichung $c \cdot c = c$.
Zur Hausdorff-Dimension der Menge $M(R,S)$ siehe A.D. Pollington [115].

Eine Zahl ξ zu $R = \emptyset$, also eine Zahl die zu keiner Basis normal ist, haben wir bereits im Laufe des Beweises konstruiert. Die angegebene Konstruktion lässt sich auch auf den Fall $S = \emptyset$ ausweiten:
Wir wählen dazu eine Folge natürlicher Zahlen $s(1), s(2), \dots$ größer als 2, so dass $s(m) \leq ms(1)$ ist, und es zu jedem r ein $m_0(r)$ mit $r \not\sim s(m)$ für $m \geq m_0$ gibt. Unter Verwendung dieser Folge $s(1), s(2), \dots$ konstruieren wir eine Menge σ wie im Beweis des vorhergehenden Satzes. Um eine Zahl ξ zu konstruieren, benützen wir statt $A_m(x)$ die modifizierte Funktion $A'_m(x)$, in der Summe

$$\sum_{i=1}^{m} \quad \text{durch} \quad \sum_{r_i,\ i \leq m,\ m_0(r_i) \leq m}$$

ersetzt wird. Da nun $r_i \not\sim s(m)$ ist, kann $A'_m(\xi)$ ähnlich abgeschätzt werden wie $A_m(\xi)$ im Beweis des Satzes, und somit ist ξ absolut normal.

Kapitel 6

Diskrepanz normaler Zahlen

In Kapitel 2.4 haben wir eine Verbindung zwischen Normalität (bezüglich einer Basis β) einer Zahl $a = \lfloor a \rfloor + 0.a_1a_2a_3\dots$ und Gleichverteilung modulo 1 der Folge $a, a\beta, a\beta^2, a\beta^3, \dots$ hergestellt. Ein Maß für die "Qualität" der Gleichverteilung einer Folge bietet die Diskrepanz. Sie wird folgendermaßen definiert:

Definition 6.0.1 *Sei $\omega = \omega(1), \omega(2), \dots, \omega(N)$ eine endliche Folge reeller Zahlen. Dann bezeichnen wir die Zahl*

$$D_N(\omega) = \sup_{0 \le c \le d \le 1} \left| \frac{A(\omega, N, [c, d[)}{N} - (d - c) \right|$$

als "Diskrepanz" der Folge ω. Dabei bezeichnet $A(\omega, N, [c, d[)$ wie in Kapitel 2.2 die Anzahl jener Folgenglieder $\omega(n)$, deren Bruchteil $\{\omega(n)\}$ im Intervall $[c, d[$ liegt.
Für eine unendliche Folge ω bezeichnet D_N die Diskrepanz jener endlichen Teilfolge, welche aus den ersten N Folgengliedern von ω besteht.

Definition 6.0.2 *Sei a eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir als "Diskrepanz" $D_N(a)$ dieser Zahl (bezüglich einer Basis β) die Diskrepanz der Folge $a, a\beta, , a\beta^2, \dots$.*

6.1 Zusammenhang zwischen Diskrepanz und Gleichverteilung

Einen Zusammenhang zwischen Diskrepanz und Gleichverteilung modulo 1 einer Folge reeller Zahlen stellt der folgende Satz her. Der hier angeführte Beweis folgt dem bei M. Drmota und R.F. Tichy [37, S. 4] angegebenen, der auf den für unsere Zwecke ausreichenden eindimensionalen Fall reduziert wird.

Satz 6.1.1 *Eine Folge ω ist gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn*

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega) = 0 \tag{6.1}$$

gilt.

Beweis: Ganz offensichtlich folgt aus Gleichung (6.1) sofort die Gleichverteilung modulo 1 der Folge ω. Uns bleibt daher nur der umgekehrte Fall zu zeigen, dass also jede modulo 1 gleichverteilte Folge ω Gleichung (6.1) erfüllt.

Sei ω eine modulo 1 gleichverteilte Folge, M eine positive ganze Zahl, und bezeichne I_m für alle ganzzahligen m mit $0 \leq m < M$ das Intervall $[\frac{m}{M}, \frac{m+1}{M})$. Da die Folge ω modulo 1 gleichverteilt ist exisitert eine positive Zahl N_0, sodass

$$\frac{1}{M}\left(1 - \frac{1}{M}\right) \leq \frac{A(\omega, N, I_m)}{N} \leq \frac{1}{M}\left(1 + \frac{1}{M}\right) \tag{6.2}$$

für alle $N > N_0$ und alle Intervalle I_m mit $0 \leq m < M$ gilt.

Nun betrachten wir ein beliebiges Intervall $I \subset [0, 1]$. Es gibt Intervalle $\underline{I}$ und $\overline{I}$ mit $\underline{I} \subset I \subset \overline{I}$, welche sich als endliche Vereinigung von Intervallen I_m darstellen lassen und für die

$$l(\overline{I}) - l(\underline{I}) \leq \frac{2}{M} \tag{6.3}$$

gilt. Dabei bezeichnet wir mit $l(I)$ (wie in Kapitel 2.2) die Länge eines Intervalls I. Damit erhalten wir aus Ungleichung (6.2)

$$\begin{aligned} l(\underline{I})\left(1 - \frac{1}{M}\right) &\leq \frac{A(\omega, N, \underline{I})}{N} \leq \frac{A(\omega, N, I)}{N} \\ &\leq \frac{A(\omega, N, \overline{I})}{N} \leq l(\overline{I})\left(1 + \frac{1}{M}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

für $N \geq N_0$.
Nun folgt aus (6.3) und (6.4) sofort

$$\left(l(I) - \frac{2}{M}\right)\left(1 - \frac{1}{M}\right) \leq \frac{A(\omega, N, I)}{N} \leq \left(l(I) + \frac{2}{M}\right)\left(1 + \frac{1}{M}\right)$$

und damit (wegen $l(I) \leq 1$)

$$\left|\frac{A(\omega, N, I)}{N} - l(I)\right| \leq \frac{3}{M} + \frac{2}{M^2}$$

für alle $N \geq N_0$.
Somit erfüllt die Folge ω Gleichung (6.1) und der Satz ist bewiesen. □

Daraus ergibt sich mit Satz 2.4.1 sofort folgende Aussage:

Proposition 6.1.1 *Eine reelle Zahl a ist normal zur Basis β genau dann, wenn für die Diskrepanz dieser Zahl (bezüglich der Basis β)*

$$\lim_{N \to \infty} D_N = 0$$

gilt.

6.2 Allgemeine Diskrepanzabschätzungen

Eine erste wichtige Diskrepanzabschätzung stammt von A. Khintchine [62] aus dem Jahr 1924. Er zeigte folgende Abschätzung (dabei bezeichnet $N(b, A_n)$ wie in Kapitel 2.1 jene Anzahl, mit der die Ziffer b unter den ersten n Nachkommastellen A_n von a auftritt):

Satz 6.2.1 *Gegeben sei eine Basis $\beta \geq 2$. Dann gilt für fast alle reellen Zahlen a für jedes ganzzahlige b mit $0 \leq b < \beta$:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(b, A_n) - \frac{n}{\beta}}{\sigma\ f(n)} = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{N(b, A_n) - \frac{n}{\beta}}{\sigma\ f(n)} = -1$$

mit

$$f(n) = \sqrt{2n \log\log n} \quad und \quad \sigma^2 = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{\beta}.$$

Dieses Resultat wirkt heute, aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht, wenig überraschend: es ist das erste Auftreten (eines Spezialfalls) eines Satz, der heute als "Gesetz des iterierten Logarithmus" bezeichnet wird (siehe dazu N.H. Bingham [12] und auch G. Harman [49]). Denn man kann die Ziffern a_i der β-adischen Entwicklung $a = \lfloor a \rfloor + a_1 a_2 a_3 \ldots$ als unabhängige Zufallsvariable auffassen, die jeden der Werte $0 \leq b < \beta$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Der Wert σ^2 entspricht dabei der Varianz, n/β dem Erwartungswert (für die Anzahl des Auftretens einer bestimmten Ziffer innerhalb eines n-stelligen Ziffernblocks).

I.S. Gal und L. Gal [43] zeigten 1964, dass (bezüglich einer Basis β)

$$D_N(a) = \mathcal{O}\big((N^{-1} \log\log N)^{1/2}\big) \quad \text{für fast alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

gilt.

Von N.M. Korobov [67] stammt die Frage nach einer "kleinstmöglichen" Funktion $\psi(N)$ (also einer Funktion mit geringstmöglichem asymptotischem Wachstum), zu der mindestens eine reelle Zahl a mit

$$D_N(a) \leq \psi(N)$$

exisitert. Er zeigte selbst, dass $\psi(n) = \mathcal{O}(N^{-1/2})$ gilt (siehe Korobov [67]).

1966 zeigte Korobov [65]

$$\psi(N) = \mathcal{O}(N^{-2/3} \log^{4/3} N)$$

bezüglich Basen β, die Primzahlen sind. 1977 erweiterte M.B. Levin [76] diese Abschätzung auf allgemeines β.
1999 schließlich erreichte Levin [74]

$$\psi(N) = \mathcal{O}(N^{-1} \log^2 N).$$

Diese Abschätzung ist in einem gewissen Sinn bestmöglich (oder, mit Levins [74] Worten: *the estimate obtained cannot be improved essentially*), da W.M. Schmidt bereits 1972 die Ungleichung

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{N\ D_N(\omega)}{\log N} > 0$$

für beliebige reellwertige Folgen ω gezeigt hat.

6.3 Diskrepanz einer Klasse normaler Zahlen

In diesem Kapitel sollen Diskrepanzabschätzungen für eine bestimmte Klasse normaler Zahlen angegeben werden. Die beiden folgenden Sätze aus dem Jahr 1986 stammen von Johann Schiffer [123]. Wir folgen beim Beweis dieser Sätze dem von M. Drmota und R.F. Tichy [37, S. 105-117] angeführten, welcher im Wesentlichen dem von J. Schiffer [123] angegebenen Beweis gleicht.

Satz 6.3.1 *Sei $f(x)$ nichtkonstantes Polynom mit rationalen Koeffizienten, so dass $f(x) \geq 1$ für alle $x \geq 1$ gilt. Zu einer festen Basis $\beta \geq 2$ sei eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definiert durch*

$$a_1, a_2, a_3, \dots = \lfloor f(1) \rfloor, \lfloor f(2) \rfloor, \lfloor f(3) \rfloor, \dots,$$

wobei $\lfloor f(n) \rfloor$ jeweils in β-adischer Darstellung gegeben sei. Weiters sei eine relle Zahl a definiert durch

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \beta^{-k} = 0.\lfloor f(1) \rfloor \lfloor f(2) \rfloor \lfloor f(3) \rfloor \dots .$$

Dann gilt für die Diskrepanz $D_N(a)$ dieser Zahl

$$D_N(a) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

Satz 6.3.2 *Sei $f(x)$ ein lineares Polynom mit rationalen Koeffizienten, so dass $f(n) \geq 1$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt. Zu einer festen Basis $\beta \geq 2$ sei eine reelle Zahl a definiert durch*

$$a = 0.\lfloor f(1) \rfloor \lfloor f(2) \rfloor \lfloor f(3) \rfloor \dots,$$

wobei $\lfloor f(n) \rfloor$ *jeweils in* β*-adischer Darstellung gegeben sei. Dann gibt es eine Konstante* $c > 0$*, so dass für die Diskrepanz* $D_N(a)$ *von* a

$$D_N(a) > \frac{c}{\log N}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Der Vollständigkeit halber sei noch der folgende, von Y. Nakai und I. Shiokawa [98] stammende Satz angeführt, der eine Verallgemeinerung von Satz 6.3.1 darstellt:

Satz 6.3.3 *Sei* $f(x)$ *ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten, so dass* $f(x) > 0$ *für alle* $x > 0$ *gilt, und sei zu einer festen Basis* $\beta \geq 2$ *eine reelle Zahl* a *definiert durch*

$$a = 0.\lfloor f(1) \rfloor \lfloor f(2) \rfloor \lfloor f(3) \rfloor \ldots,$$

wobei $\lfloor f(n) \rfloor$ *jeweils in* β*-adischer Darstellung gegeben sei. Dann gilt für die Diskrepanz* D_N *dieser Zahl*

$$D_N(a) = \mathcal{O}\left(\frac{\log \log N}{\log N}\right) \qquad \textit{(Nakai und Shiokawa [97], 1990)}$$

bzw.

$$D_N(a) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log N}\right) \qquad \textit{(Nakai und Shiokawa [98], 1992).}$$

Für einen Beweis dieses Satz siehe Nakai und Shiokawa [97][98]. Nakai und Shiokawa [98] selbst meinen zu dem von ihnen angegebenen Beweis: *Our method of the proof in [97], which is quite different from that of Schiffer [123], made use of an estimate of Weyl sums in a somewhat unusual manner and of simple remarks on diophantine approximation. In this paper, we further develop this method by employing inductive arguments and we obtain the improved results. As for the proof of the result in [96], tricky estimates for exponential sums of Vinogradov type were used.*

Die in Satz 6.3.1 gegebene Definition einer Zahl stellt eine Verallgemeinerung der Konstruktion von Davenport-Erdös (siehe Kapitel 4.3) dar. Wenn wir die behauptete Diskrepanzabschätzung beweisen können, folgt damit insbesondere die Normalität der so konstruierten Zahlen zur Basis β, wie in Kapitel 6.1 gezeigt wurde.

Zum Beweis der beiden Sätze 6.3.1 und 6.3.2 verwenden wir folgende Notation:
Zu einer Funktion $f : N \rightarrow [1, \infty)$ betrachten wir die β-adische Entwicklung

$$a(f) = 0.\lfloor f(1) \rfloor \lfloor f(2) \rfloor \lfloor f(3) \rfloor \ldots,$$

welche gebildet wird durch Aneinanderreihung der β-adischen Darstellung der Zahlen $\lfloor f(1) \rfloor, \lfloor f(2) \rfloor, \ldots$

Um mehr Übersichtlichkeit zu erreichen werden wir die einzelnen Blöcke $\lfloor f(n) \rfloor$ und $\lfloor f(n+1) \rfloor$ gelegentlich durch Kommas trennen, also statt z.B. $\lfloor f(1) \rfloor \lfloor f(2) \rfloor \lfloor f(3) \rfloor \dots$ die Notation $\lfloor f(1) \rfloor, \lfloor f(2) \rfloor, \lfloor f(3) \rfloor, \dots$ verwenden.

Für beliebige positive ganze Zahlen n und l bezeichne $T(n)$ die Summe der Anzahlen der Ziffern von $\lfloor f(1) \rfloor, \dots, \lfloor f(n) \rfloor$ und u_l die kleinste positive ganze Zahl m, für welche die Anzahl der Ziffern von $\lfloor f(m) \rfloor$ mindestens gleich l ist. Falls f streng monoton wachsend ist, gilt $f(u_l - 1) < \beta^{l-1} \leq f(u_l)$ für hinreichend großes l.

Zu jeder reellen Zahl $a = \lfloor a \rfloor.a_1 a_2 a_3 \dots$, jeder natürlichen Zahl $k \geq 1$ und jedem k-stelligen Ziffernblock $B_k = b_1 \dots b_k$ bezeichne $N(B_k, S, N)$ jene Anzahl, mit welcher der Block B_k in $a_S a_{S+1} \dots a_N$ aufscheint, also die Anzahl der Werte i mit $S \leq i \leq N-k+1$, für die $a_i a_{i+1} \dots a_{i+k} = b_1 b_2 \dots b_k$ gilt. Statt $N(B_k, 1, N)$ verwenden wir wie in Kapitel 2.1 die Schreibweise $N(B_k, A_N)$ für die Anzahl des Auftretens eines Zifferblocks B_k unter den ersten N Nachkommastellen A_N einer reellen Zahl a.

Für $k \leq l$ und $u_l \leq v < u_{l+1}$ schreiben wir zur Abkürzung $N^*(B_k, v)$ statt $N(B_k, T(u_l - 1), T(v))$. Offenbar gibt $N^*(B_k, v)$ jene Anzahl an, mit welcher der Block B_k in $\lfloor f(u_l) \rfloor, \lfloor f(u_{l+1}) \rfloor, \dots, \lfloor f(v) \rfloor$ auftritt. Nun gibt es zwei Möglichkeiten für das Auftreten von B_k in der angegebenen Ziffernfolge (vgl. die Vorgehensweise beim Beweis der Normalität der Champernowne-Zahl, Kapitel 4.1):

1. B_k tritt für ein bestimmtes u mit $u_l \leq u \leq v$ innerhalb eines Blockes $\lfloor f(u) \rfloor$ auf, und überschreitet daher kein einziges Komma in $\lfloor f(u_l) \rfloor, \dots, \lfloor f(v) \rfloor$. Wir bezeichnen jene Anzahl, mit der B_k unter dieser Bedingung auftritt, mit $N_1^*(B_k, v)$.

2. B_k tritt für ein bestimmtes u mit $u_l \leq u < v$ innerhalb von $\lfloor f(u) \rfloor, \lfloor f(u+1) \rfloor$ auf und überschreitet dabei das Komma. Mit $N_2^*(B_k, v)$ bezeichnen wir jene Anzahl, mit der B_k unter dieser Bedingung in $\lfloor f(u_l) \rfloor, \dots, \lfloor f(v) \rfloor$ auftritt.

Offensichtlich gilt $N^*(B_k, v) = N_1^*(B_k, v) + N_2^*(B_k, v)$ sowie

$$N(B_k, S, U) = N(B_k, S, N) + N(B_k, N, U) + \mathcal{O}(k)$$

für alle k-stelligen Ziffernblöcke B_k und $S \leq N \leq U$.

Sei $d \geq 1$ eine natürliche Zahl, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ seien rationale Zahlen und

$$f(x) = \alpha_d x^d + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Sei oBdA. $f(x)$ monoton wachsend. Dann gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} &f(x) \gg\ll x^d,\ f'(x) \gg\ll x^{d-1},\ f^{-1}(x) \gg\ll x^{1/d},\ (f^{-1})'(x) \gg\ll x^{(1/d)-1} \\ &\text{und} \quad (f^{-1})''(x) \gg\ll x^{(1/d)-2} \quad \text{falls} \quad d > 1. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Daher ist, da für hinreichend großes l offensichtlich $u_l < u_{l+1}$ und $f(u_l - 1) < \beta^{l-1} \le f(u_l)$ gilt, die Anzahl der Ziffern von $f(x)$ genau dann l, wenn $u_l \le x < u_{l+1}$, und $T(l) \sim l\beta^{l/d}$.

Lemma 6.3.1 *Seien u, v, k, l, n positive ganze Zahlen mit $u < v$, und sei b eine ganze Zahl, so dass*

$$\beta^{l-1} \le f(u) \le f(v) < \beta^l \quad \textit{und} \quad k \le n \le l \quad \textit{sowie} \quad 0 \le b < \beta^n$$

gilt. Dann folgt

$$\underbrace{\sum_{u \le x < v} \sum_{0 \le t < \beta^{n-k}}}_{\lfloor f(x) \rfloor \equiv b+t \ mod \ \beta^n} 1 = \beta^{-k}(v-u) + \mathcal{O}\big((v-u)(\beta^{-n\epsilon} + \beta^{n-k-l})\big) \tag{6.6}$$

für jedes beliebige $\epsilon > 0$, wobei ϵ und die durch das Landau-Symbol implizierte Konstante nicht von u, v, k, l, n und b abhängen.

Beweis: Bezeichne $S(u,v)$ den Ausdruck auf der linken Seite von (6.6). Mit $u_0 = \lfloor f^{-1}(\frac{1}{2}\beta^{l-1}) \rfloor$ gilt offensichtlich $S(u,v) = S(u_0,v) - S(u_0,u)$, und es genügt daher, Ungleichung (6.6) für $u = u_0$ und $\beta^{l-1} \le f(v) < \beta^l$ zu zeigen. In diesem Fall ist

$$v - u \sim \beta^{l/d}. \tag{6.7}$$

Wir unterteilen den Beweis von (6.6) in zwei Fälle. Im ersten Fall nehmen wir $d = 1$ oder $n > l\big(1 - 1/(4d)\big)$ an. Wir setzen

$$U = \Big\lfloor \big(f(u) - b\big)\beta^{-n} \Big\rfloor + 1 \quad \text{und} \quad V = \Big\lfloor \big(f(v-1) - b\big)\beta^{-n} \Big\rfloor - 1$$

sowie

$$d(Y) = f^{-1}(Y\beta^n + b + \beta^{n-k}) - f^{-1}(Y\beta^n + b) \quad \text{für} \quad U - 1 \le Y \le V + 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S(u,v) &= \underbrace{\sum_{Y \in \mathbb{N}} \sum_{u \le x < v} \sum_{0 \le t < \beta^{n-k}}}_{\lfloor f(x) - b \rfloor = Y\beta^n + t} 1 \qquad (6.8) \\ &= \sum_{U \le Y \le V} \big(d(Y) + \mathcal{O}(1)\big) + \mathcal{O}\big((d(U-1) + d(V+1)\big). \end{aligned}$$

For festes Y gilt

$$d(Y) = \beta^{n-k}(f^{-1})'(Y\beta^n + b) + \frac{1}{2}\beta^{2n-2k}(f^{-1})''\big(Y\beta^n + b + z(Y)\big)$$

mit $z(y) \in [0, \beta^{n-k}]$. Unter Anwendung der Abschätzungen in (6.5) und mit $Y \sim \beta^{l-n}$ erhalten wir

$$(f^{-1})''\big(Y\beta^n + b + z(Y)\big) \ll \beta^{l/d-2l} \quad \text{sowie} \quad d(Y) \ll \beta^{l/d-l+n-k} \tag{6.9}$$

und $V - U \ll \beta^{l-n}$.

Da $d(Y)$ monoton wachsend ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{U \le Y \le V} d(Y) &= \int_U^V d(y) + \mathcal{O}\big(d(U)\big) \\ &= \beta^{-k}\big(f^{-1}(V\beta^n + b) - f^{-1}(U\beta^n + b)\big) + \mathcal{O}(\beta^{l/d-l+n-2k}) + \mathcal{O}\big(d(U)\big).\end{aligned}$$

Aus $U\beta^n + b = f(u) + \mathcal{O}(\beta^n)$ folgt

$$f^{-1}(U\beta^n + b) = u + \mathcal{O}(\beta^{l/d-l+n}),$$

und, auf dieselbe Weise,

$$f^{-1}(V\beta^n + b) = v + \mathcal{O}(\beta^{l/d-l+n}).$$

In Verbindung mit (6.8) und (6.9) folgt daraus

$$S(u,v) = \beta^{-k}(v-u) + \mathcal{O}(\beta^{l/d-l+n-k} + \beta^{l-n}).$$

Nun folgt (6.6) aus (6.7) und $l - n \le (l/d) - \epsilon n$ für $d = 1$ oder $n > l\big(1 - 1/(4d)\big)$.

Im zweiten Fall können wir $n \le l\big(1 - 1/(4d)\big)$ und $d \ge 2$ voraussetzen. Wir wählen $N' \in \mathbb{N}$ so, dass alle Koeffizienten von $N'f$ ganze Zahlen sind (das ist möglich, da f nur rationale Koeffizienten besitzt). Weiters setzen wir $F = N'f, N = N'\beta^{n-k}, M = N'\beta^n$ und $B = N'b$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}S(u,v) &= \underbrace{\sum_{u \le x < v} \sum_{0 \le t < N}}_{F(x) \equiv B+t \bmod M} 1 = \sum_{0 \le t < N} \sum_{u \le x < v} \frac{1}{M} \sum_{1 \le h \le M} e\left(\big(F(x) - B - t\big)\frac{h}{M}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{0 \le t < N} \sum_{u \le x < v} \underbrace{e\big(F(x) - B - t\big)}_{=1} \\ &+ \frac{1}{M} \sum_{1 \le h < M} e\left(-B\frac{h}{M}\right) \sum_{0 \le t < N} e\left(-t\frac{h}{M}\right) \sum_{u \le x < v} e\left(F(x)\frac{h}{M}\right) \\ &= (v-u)\frac{N}{M} + \frac{R}{M},\end{aligned} \tag{6.10}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$e(x) = e^{2\pi i x}$$

und

$$R = \sum_{1\le h\le M} e\Big(-B\,\frac{h}{M}\Big)\frac{e(-Nh/M)-1}{e(-h/M)-1}\sum_{u\le x<v} e\Big(F(x)\frac{h}{M}\Big)$$

verwenden.

Aus

$$|e^{iw}-e^{iz}| = 2\sin\left|\frac{w-z}{2}\right|$$

und mit der Schreibweise $E(m,h,t)$ statt $\big|\sum_{1\le x\le m} e\big(F(x+u-1)(h/t)\big)\big|$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
R &\ll \sum_{1\le h<M}\Big(\sin\pi\frac{h}{M}\Big)^{-1}\Big|\sum_{u\le x<v} e\Big(F(x)\frac{h}{M}\Big)\Big| && (6.11)\\
&= \underbrace{\sum_{t\mid M}\ \sum_{1\le h<t}}_{\mathrm{ggT}(h,t)=1} E(v-u,h,t)\Big(\sin\pi\frac{h}{t}\Big)^{-1}\\
&= \underbrace{\sum_{t\mid M}\ \sum_{1\le h<t}}_{\mathrm{ggT}(h,t)=1}\Big(\sin\pi\frac{h}{t}\Big)^{-1}\Big\lfloor\frac{v-u}{t}\Big\rfloor E(t,h,t)\\
&+ \underbrace{\sum_{t\mid M}\ \sum_{1\le h<t}}_{\mathrm{ggT}(h,t)=1,\ t<v-u}\Big(\sin\pi\frac{h}{t}\Big)^{-1} E\Big(t\Big\{\frac{v-u}{t}\Big\},h,t\Big)\\
&+ \underbrace{\sum_{t\mid M}\ \sum_{1\le h<t}}_{\mathrm{ggT}(h,t)=1,\ t>v-u}\Big(\sin\pi\frac{h}{t}\Big)^{-1} E(v-u,h,t).
\end{aligned}$$

Seien h,t,p,q ganze Zahlen mit $1\le h<t$, $\mathrm{ggT}(h,t)=1$, $t\mid M$, $\mathrm{ggT}(p,q)=1$ und $p/q=\alpha_d N'\frac{h}{t}$. Dann ist $t(\alpha_d N')^{-1}\le q\le t$ wegen $\mathrm{ggT}(h,t)=1$ und $\alpha_d N'\in\mathbb{N}$.
Für $t>v-u$ und hinreichend großes l gilt

$$(v-u)^{1/8} < t^{1/8} < t(\alpha_d N')^{-1}\le q$$

und

$$q\le N'\beta^n \ll \beta^{l-l/4d}\ll (v-u)^{d-1/4},$$

und daher $q\le (v-u)^{d-1/8}$. Jetzt erhalten wir unter Anwendung der Weyl'schen Ungleichung (Satz 2.5.1, S. 32)

$$\begin{aligned}
E(v-u,h,t) &\ll (v-u)^{1+\epsilon}\big((v-u)^{-1}+q^{-1}+q(v-u)^{-d}\big)^{1/K} && (6.12)\\
&\ll (v-u)^{1-\sigma}\quad \text{falls}\quad t>v-u && (6.13)
\end{aligned}$$

für ein $\sigma = \sigma(d) > 0$ und $K = 2^{d-1}$. Für $t^{1-\sigma} < s < t$ erhalten wir (σ kann beliebig klein gewählt werden)

$$s^{1/8} < t < t^{(1-\sigma)(d-1/8)} < s^{d-1/8}$$

und damit $E(s,h,t) \ll s^{1-\sigma}$. Es gilt also $E(s,h,t) \ll t^{1-\sigma}$ für $s \le t$. Zusammen mit (6.11) und (6.12) und unter Verwendung von

$$\sum_{1 \le h < t} \left(\sin \pi \frac{h}{t} \right)^{-1} \ll t \log t$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} R &\ll \sum_{t|M} (v-u) t^{1-\sigma} \log t + \sum_{t|M,\ t<v-u} t t^{1-\sigma} \log t + \sum_{t|M,\ t>v-u} t (v-u)^{1-\sigma} \log t \\ &\ll \log M \big((v-u) M^{1-\sigma} + (v-u)^{1-\sigma} M \log M \big). \end{aligned}$$

Wegen $(v-u)^{-\sigma} \ll \beta^{-\sigma(l/d)}$ und $n \le l$ erhalten wir $R \ll (v-u)\beta^{n-n\epsilon}$ für beliebiges $\epsilon > 0$. Damit folgt (6.6) sofort aus (6.10) und Lemma 6.3.1 ist bewiesen. $\square$

Beweis von Satz 6.3.1: Sei $B_k = b_1 b_2 \ldots b_k$ ein k-stelliger Ziffernblock (von Ziffern zur Basis β) und

$$b = b_1 \beta^{k-1} + b_2 \beta^{k-2} + \cdots + b_k.$$

Für $k < l$ und $u_l \le v < u_{l+1}$ erhalten wir unter Verwendung von Lemma 6.3.1

$$\begin{aligned} N_1^*(B_k, v) &= \underbrace{\sum_{0 \le j \le l} \sum_{u_j \le x \le v} \sum_{0 \le t < \beta^{l-k-j}}}_{\lfloor f(x) \rfloor \equiv b\beta^{l-k-j} + t \mod \beta^{l-j}} 1 \qquad (6.14) \\ &= \beta^{-k}(l-k+1)(v-u_l+1) + \sum_{0 \le j \le l-k} \mathcal{O}(\beta^{l/d-(l-j)\epsilon} + \beta^{l/d-k-j}) \\ &= l(v+1-u_l)\beta^{-k} + \mathcal{O}(\beta^{l/d-k\epsilon}). \end{aligned}$$

Weiters ist

$$N_2^*(B_k, v) \le N_2^*(B_k, u_{l+1}-1) \le \sum_{1 \le j < k} \sum_{u_l \le x < u_{l+1}} 1 + \mathcal{O}(1),$$

wobei sich die letzte Summe nur über jene x erstreckt, für welche $b_1 b_2 \ldots b_{k-j}$ die letzten Ziffern der β-adischen Entwicklung von $\lfloor f(x) \rfloor$ und $b_{k-j+1} b_{k-j+2} \ldots b_k$ die ersten Ziffern der β-adischen Darstellung von $\lfloor f(x+1) \rfloor$ sind. Für $b_{k-j+1} \ne 0$ sei

$$\begin{aligned} C_j &= \lfloor f^{-1}(b_{k-j+1}\beta^{l-1} + \cdots + b_k \beta^{l-j} - 1) \rfloor, \\ D_j &= \lfloor f^{-1}(b_{k-j+1}\beta^{l-1} + \cdots + b_k \beta^{l-j} + \beta^{l-j} - 1) \rfloor. \end{aligned}$$

Aus (6.6) und der Tatsache, dass $D_j - C_j \ll \beta^{l/d-j}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} N_2^*(B_k, v) &\ll \sum_{\substack{1 \le j < k, \\ b_{k-j+1} \neq 0}} \left(\sum_{\substack{C_j \le x \le D_j, \\ \lfloor f(x) \rfloor \equiv b_1 \beta^{k-j+1} + \cdots + b_{k-j} \bmod \beta^{k-j}}} 1 \right) + \mathcal{O}(1) \qquad (6.15) \\ &= \sum_{\substack{1 \le j < k, \\ b_{k-j+1} \neq 0}} \left(\beta^{-(k-j)} (D_j - C_j) + \mathcal{O}\big((D_j - C_j)(\beta^{-(k-j)\epsilon} + \beta^{-l}) \big) \right) \\ &\ll \beta^{l/d - \epsilon k} \end{aligned}$$

Wenn wir nun (6.14) und (6.15) zusammenfassen, erhalten wir

$$N^*(B_k, v) = \beta^{-k} l(v + 1 - u_l) + \mathcal{O}(\beta^{l/d-\epsilon k}). \qquad (6.16)$$

Zu $N \in \mathbb{N}$ können wir $n, u \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $k < n/2$, $u_n \le u < u_{n+1}$ und $T(u-1) < N \le T(u)$ ist. Dann gilt $N = T(u) + \mathcal{O}(n)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} N(B_k, A_N) &= \sum_{1 \le l < n} N^*(B_k, u_{l+1} - 1) + N^*(B, u) + \mathcal{O}(kn) + \mathcal{O}\big(kT_k\big) \qquad (6.17) \\ &= \sum_{1 \le l < n} \big(\beta^{-k} l(u_{l+1} - u_l) + \mathcal{O}(\beta^{l/d-\epsilon k}) \big) \\ &\quad + \beta^{-k} n(u - u_n) + \mathcal{O}(\beta^{n/d-\epsilon k} + kn + k^2 \beta^{k/d}) \\ &= \beta^{-k} N + \mathcal{O}(\beta^{n/d-\epsilon k}). \end{aligned}$$

Zu jedem Intervall $I \subset [0, 1)$ definieren wir

$$\Delta_{N,I} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_I(\{\beta^n a\} - l(I),$$

wobei $l(I)$ die Länge des Intervalls I und c_I die charakteristische Funktion dieses Intervalls bezeichnet.

Sei $k \ge 1, c_1, c_2, \ldots, c_k$ seien Ziffern zur Basis β und $B_k = c_1 c_2 \ldots c_k$ ein k-stelliger Ziffernblock. Weiters sei $I = [\gamma, \gamma + \beta^{-k})$ mit

$$\gamma = \sum_{1 \le i \le k} c_i \beta^{-i}.$$

Für $k = \mathcal{O}(\log N)$ erhalten wir für hinreichend großes N

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_I(\{\beta^n a\}) = \sum_{\substack{1 \le n \le N, \\ c_1 \ldots c_k = a_n \ldots a_{n+k-1}}} 1 = N(B_k, A_N) + \mathcal{O}(k).$$

Wegen $N \sim n\beta^{n/d},\ n \sim \log N$ und (6.17) erhalten wir

$$|\Delta_{N,[\gamma,\gamma+\beta^{-k})}| = \left|\frac{1}{N}N(B_k, A_N) - \beta^{-k} + \mathcal{O}(k/N)\right| \ll \beta^{-\epsilon k}\frac{1}{\log N}. \tag{6.18}$$

Nun sei $b \in [0,1),\ h \in \mathbb{N},\ h \geq 1,\ b\beta^h \in \mathbb{N}$ und $b = \sum_{1\leq k\leq h} b_k\beta^{-k}$ die β-adische Entwicklung von b, sowie

$$b_{k,j} = \sum_{1\leq i\leq k} b_i\beta^{-i} + j\beta^{-j} \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq h,\ 0 \leq j \leq b_k.$$

Da $b_{1,0} = 0$ und $b_{k,b_k} = b_{k+1,0}$ für $1 \leq k \leq h$ ist erhalten wir mit (6.18) für $h = \mathcal{O}(\log N)$

$$|\Delta_{N,[0,b)}| = \sum_{1\leq k\leq h}\ \sum_{0\leq j<b_k} |\Delta_{N,[b_{k,j},b_{k,j+1})}| \ll \sum_{1\leq k\leq h} \beta^{-\epsilon k}\frac{1}{\log N} \ll \frac{1}{\log N}.$$

Sei nun γ eine beliebige reelle Zahl aus dem Intervall $[0,1)$. Sei $h = \lfloor \log\log N \rfloor$ und seien a und b ebenfalls aus $[0,1)$ mit $a \leq \gamma \leq b,\ b - a = \beta^{-h},\ b\beta^h \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\Delta_{N,[0,\gamma)} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_{[0,b]}(\{\beta^n a\}) - a = \Delta_{N,[0,b)} + \beta^{-h}$$

sowie, auf dieselbe Weise,

$$\Delta_{N,(0,\gamma)} \geq \Delta_{N,(0,a)} - \beta^{-h}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |\Delta_{N,[0,\gamma)}| &\leq \max\left\{|\Delta_{N,[0,a)}|, |\Delta_{N,[0,b)}|\right\} + \beta^{-h} \\ &\ll \frac{1}{\log N} + \beta^{-h} \ll \frac{1}{\log N}. \end{aligned}$$

Somit ist Satz 6.3.1 beweisen. $\square$

Lemma 6.3.2 *Sei $a \in [0,1)$ und seien $B_{1,k}$ und $B_{2,k}$ zwei jeweils k-stellige Ziffernblöcke. Falls*

$$|N(B_{1,k}, A_N) - N(B_{2,k}, A_N)| > K\frac{N}{\log N} \tag{6.19}$$

für eine Konstante $K > 0$ und unendliche viele (bzw. fast alle) $N \in \mathbb{N}^+$ gilt, dann ist

$$D_N(a) > \frac{C}{\log N}$$

für unendlich viele (bzw. fast alle) $N \in \mathbb{N}^+$, mit einer Konstanten $C > 0$. K und C können dabei von $B_{1,k}, B_{2,k}$ und a abhängen.

Beweis: Wir setzen

$$\alpha_i = \sum_{1\le j\le k} b_{i,j}\beta^{-j} \quad \text{für} \quad i = 1,2,$$

wobei jeweils $b_{i,j}$ die Ziffern des Blocks $B_{i,k}$ seien. Weiters sei $I_i = [\alpha_i, \alpha_i + \beta^{-k})$ für $i = 1,2$. Falls $N \ge k$ gilt und N Bedingung (6.19) erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned}
D_{N-k+1}(a) &\ge \max_{i=1,2}\left|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-k} c_{I_i}(\{\beta^j a\}) - \beta^{-k}\right| \\
&= \max_{i=1,2}\left|\frac{1}{N}N(B_{i,k}, A_N) - \beta^{-k}\right| \\
&> \frac{1}{2N}|N(B_{1,k}, A_N) - N(B_{2,k}, A_N)| \\
&> \frac{C}{\log(N-k+1)}
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$. □

Beweis von Satz 6.3.2: Seien C und D rationale Zahlen, $f(x) = Cx + D$, $C > 0$, $C + D > 1$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}^+$ und zwei k-stellige Ziffernblöcke $B_{1,k}$ und $B_{2,k}$, wobei $B_{1,k}$ die Bedinungen

$$\sum_{1\le j\le k} b_{1,j}\beta^{k-j} = (\beta\lfloor f(1)\rfloor + 1)\beta^h + r \tag{6.20}$$

für natürliche Zahlen h und r mit $r < \beta^h$, (dabei bezeichnet $b_{i,j}$, $1 \le j \le k$ die Ziffern des Blocks $B_{i,k}$ für $i = 1,2$; $B_{1,k}$ ist also von der Form $\lfloor f(1)\rfloor, 1, \dots$), und

$$\sum_{1\le j\le k} b_{1,j}\beta^{k-j} = CN$$

für eine ganze Zahl N erfüllt, und $B_{2,k}$ der aus k mal der Ziffer "0" bestehende Block sei.

Zu jedem k-stelligen Ziffernblock $B_k = b_1 b_2 \dots b_k$ und $1 \le j \le l-k$, $\beta^{j-1} \le m < \beta^j$ definieren wir mit $b = \sum_{1\le j\le k} b_j\beta^{k-j}$

$$\begin{aligned}
U(j,m,B_k) &= \lfloor f^{-1}(m\beta^{l-j} + (b+1)\beta^{l-k-j})\rfloor \\
&\quad - c_{\mathbb{N}}(f^{-1}(m\beta^{l-j} + (b+1)\beta^{l-k-j})\rfloor \\
&\quad - \lfloor f^{-1}(m\beta^{l-j} + b\beta^{l-k-j}\rfloor \\
&\quad + c_{\mathbb{N}}\big(f^{-1}(m\beta^{l-j} + b\beta^{l-k-j})\big),
\end{aligned} \tag{6.21}$$

wobei $c_{\mathbb{N}}$ die charakteristische Funktion der natürlichen Zahlen bezeichnet. Es gibt also $U(j,m,B)$ die Anzahl jener x an, für welche $\beta^{l-1} \le \lfloor f(x)\rfloor < \beta^l$ ist und $\lfloor f(x)\rfloor$ eine

β-adische Entwickling der Form $m, B_k, \ldots$ besitzt.

Wir setzen $v_l = u_{l+1} - 1$ für $l = 1, 2, \ldots$ und erhalten

$$N_1^*(B, v_l) = \sum_{1 \leq j \leq l-k} \sum_{\beta^{j-1} \leq m < \beta^j} U(j, m, B_k) + \Delta_{0,B_k,l} + \mathcal{O}(1) \tag{6.22}$$

mit

$$\Delta_{0,B_k,l} = \begin{cases} \frac{1}{C}\beta^{l-k} & \text{falls} \quad b \geq \beta^{k-1} \\ 0 & \text{falls} \quad b < \beta^{k-1} \end{cases}.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $v, n \geq 1$ mit $u_n \leq v < u_{n+1}$ und $N = T(v) + \mathcal{O}(n)$. Sei $\lfloor f(v) \rfloor = \beta^{n-1}z_1 + \beta^{n-2}z_2 + \cdots + z_n$ die β-adische Entwicklung von $\lfloor f(v) \rfloor$ und für $1 \leq j \leq n-k$:

$$\begin{aligned} Z_j &= \beta^{j-1}z_1 + \beta^{j-2}z_2 + \cdots + z_j, \\ \gamma_j &= z_{j+1}\beta^{k-1} + z_{j+2}\beta^{k-2} + \cdots + z_{j+k} \end{aligned}$$

Dann ist

$$N_1^*(B_k, v) = \sum_{1 \leq j \leq n-k} \left(\left(\sum_{\beta^{j-1} \leq m < Z_j} U(j, m, B_k) \right) + \Delta_{j,B_k} \right) + \Delta_{0,B_k} + \mathcal{O}(1), \tag{6.23}$$

wobei Δ_{j,B_k} bzw. Δ_{0,B_k} die Anzahl jener natürlichen Zahlen x bezeichnet, für welche $\beta^{l-1} \leq \lfloor f(x) \rfloor \leq v$ gilt und welche eine β-adische Entwicklung der Form $Z_j, B_k, \ldots$ besitzen. Es ist also

$$\Delta_{j,B_k} = \begin{cases} U(j, Z_j, B_k) & \text{falls} \quad b < \gamma_j \\ v - f^{-1}(Z_j\beta^{n-j} + b\beta^{n-k-j}) + \mathcal{O}(1) & \text{falls} \quad b = \gamma_j \\ 0 & \text{falls} \quad b > \gamma_j \end{cases}$$

und

$$\Delta_{0,B_k} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{0,B_k} = 0 \quad \text{falls} \quad b < \beta^{k-1}.$$

Wegen $f^{-1}(Y) = (\frac{1}{C})(Y - D)$ ist

$$\Delta_{j,B_k} < \frac{1}{C}\beta^{n-k-j} + \mathcal{O}(1) \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n-k, \ \beta^{j-1} \leq m < \beta^j.$$

Aus

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq k} b_{2,j}\beta^{k-j} < \sum_{1 \leq j \leq k} b_{1,j}\beta^{k-j}$$

folgt

$$0 \leq \Delta_{j,B_{1,k}} \leq \Delta_{j,B_{2,k}} + \mathcal{O}(1)$$

und daher auch

$$\Delta_{j,B_{2,k}} - \Delta_{j,B_{1,k}} \leq \frac{1}{C}\beta^{n-k-j} + \mathcal{O}(1). \tag{6.24}$$

Wegen

$$\sum_{1\le j\le k} b_{1,j}\beta^{k-j} = \sum_{1\le j\le k} b_{1,j}\beta^{k-j} - \sum_{1\le j\le k} b_{2,j}\beta^{k-j} = CN$$

gilt

$$U(j,m,B_{1,k}) = U(j,m,B_{2,k}) \tag{6.25}$$

für $1 \le j \le l-k,\ \beta^{j-1} \le m < \beta^j$, und aus (6.22) folgt

$$N_1^*(B_{1,k},v_l) = N_1^*(B_{2,k},v_l) + \frac{1}{C}\beta^{l-k} + \mathcal{O}(1). \tag{6.26}$$

Offensichtlich ist $N_2^*(B_{2,k},v_l)=0$. Wir wählen $i<k$ so dass $\sum_{1\le j\le i} b_{1,j}\beta^{i-j} = \lfloor f(1)\rfloor$ gilt (das ist wegen (6.20) möglich).

Bezeichne nun M die Menge aller ganzen Zahlen m mit $u_l \le m \le v_l = u_{l+1}-1$, für welche die β-adische Entwicklung von $\lfloor f(m)\rfloor$ die Form

$$\lfloor f(m)\rfloor = (b_{1,i+1}\beta^{l-1} + \cdots + b_{1,k}\beta^{l-(k-i)}) + \cdots + (b_{1,1}\beta^{j-1} + \cdots + b_{1,i}).$$

besitzt. Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist

$$\lfloor f(1+(\beta^i N)x)\rfloor = \lfloor f(1)\rfloor + \beta^i CNx \equiv \lfloor f(1)\rfloor \bmod \beta^i,$$

und für hinreichend großes l existiert eine ganzzahlige Konstante $t>0$ mit

$$\lfloor f(1+tN\beta^i)\rfloor = \lfloor f(1)\rfloor + CNt\beta^i \ \in\ f(M).$$

Daher ist M nicht leer und enthält mindestens

$$\beta^i N^{-1}\left(\frac{1}{C}\beta^{l-(k-i)} + \mathcal{O}(1)\right) + \mathcal{O}(1)$$

Elemente.

Aus $N_2^*(B_{1,k},v_l) \ge \#M + \mathcal{O}(1)$ ergibt sich $N_2^*(B_{1,k},v_l) \ge K\beta^l$ für eine Konstante $K>0$. Daher erhalten wir aus (6.23), (6.24), (6.25) und (6.26) sowie der Tatsache, dass $\Delta_{0,B_{1,k}} \ge \Delta_{0,B_{2,k}}$ gilt,

$$\begin{aligned}
N(B_{1,k},A_N) - N(B_{2,k},A_N) &\ge \sum_{1\le l<n}\big(N_1^*(B_{1,k},v_l) - N_1^*(B_{2,k},v_l) - N_2^*(B_{1,k},v_l)\big)\\
&\quad + \sum_{1\le j\le n-k}(\Delta_{j,B_{1,k}} - \Delta_{j,B_{2,k}}) + \mathcal{O}(n)\\
&\ge \sum_{1\le l<n}\left(K\beta^l + \frac{1}{C}\beta^{l-k}\right) - \sum_{1\le j\le n-k}\frac{1}{C}\beta^{n-k-j} + \mathcal{O}(n)\\
&> L\beta^n
\end{aligned}$$

für eine Konstante $L>0$ und hinreichend großes n. Damit folgt Satz 6.3.2 aus dem vorhin bewiesenen Lemma 6.3.2. □

Kapitel 7

Ist π normal?

Eines gleich vorweg: Die (zugegeben etwas reißerisch) als Überschrift dieses Kapitels gestellte Frage wird hier nicht beantwortet werden können - und auch sonst in absehbarer Zeit vermutlich nicht. Von den meisten diesbezüglichen Fachleuten wird aber angenommen, dass Konstanten wie π, e oder $\sqrt{2}$ absolut normal sind. Ein Beweis dafür ist aber nicht bekannt, und es ist offenbar auch kein solcher Beweis in Aussicht. J.C. Lagarias [72] stellt fest, dass *it is unknown wheter any algebraic number is normal to any integer base* $\beta \geq 2$.

In diesem Kapitel soll ein relativ aktueller Artikel von D.H. Bailey und R.E. Crandall [6] besprochen werden, in dem eine mögliche Vorgehensweise zum Beweis der Normalität einiger wichtiger Konstanten skizziert (aber natürlich kein vollständiger Beweis angegeben) wird. Die Überlegungen der beiden gehen zurück auf das sogenannte BBP-Verfahren aus dem Jahr 1995, benannt nach den Herren D.H. Bailey, P. Borwein und S. Plouffe, mittels dessen sich einzelne Ziffern der Nachkommastellen bestimmter Konstanten, beispielsweise π, auf relativ einfache Weise berechnen lassen, ohne alle vorhergehenden Stellen kennen zu müssen, sofern eine geeignete Reihendarstellung für die gewünschte Zahl bekannt ist. Mittels der in Gleichung (7.3) angegebenen Reihe konnte Bailey, Borwein und Plouffe etwa die 10milliardste hexadezimale Stelle von π berechnen (übrigens eine "9"). Eine BBP-Reihe für π, mittels derer sich einzelne Nachkommastellen im Dezimalsystem berechnen lassen, ist derzeit nicht bekannt.

Zunächst noch einige Bemerkungen:

Im ansonsten fundierten Buch von J. Arndt und C. Haenel [3] werden die (nicht ganz ernst gemeinten!) Gespräche von M. Gardner mit einem imaginierten "Dr.Matrix" wiedergegeben (siehe Gardner [44]), in denen dieser mittels Ziffernsummenspielereien und ähnlichem unter den ersten 32 Ziffern von π *bemerkenswerte Muster* feststellt. Ebenfalls erwähnt wird das "163-Phänomen", das vom schottischen Mathematiker Alexander

Aitken entdeckte *merkwürdige Ergebnis*, dass der Bruchteil

$$\{e^{\pi\sqrt{163}}\} = 0.9999999999992\ldots$$

ist, dass also *der Mix der transzendenten Zahlen e und π und der Primzahl 163 nicht erst recht eine krumme Zahl ergibt*, sondern *fast genau eine ganze Zahl* (eine Erklärung dieses "Phänomens" stammt übrigens von S. Ramanujan [118] mittels modularer Gleichungen). In erster Linie zeigen diese "Phänomene" aber nur, dass sich bei hinreichend ungenauer Erwartungshaltung überall "merkwürdige Muster" finden lassen (in diesem Zusammenhang hingewiesen sei auf den sogenannten "*Bible Code*" und auf dessen Persiflage durch Brendan McKay, der in Hermann Melvilles *Moby Dick* "versteckte Zukunftsvorhersagen" entdeckte, etwa den Tod Lady Di's betreffend).

Etwas ernstzunehmender sind die von S. Wagon [152] im Jahr 1985 durchgeführten statistischen Untersuchungen der (damals soeben von Y. Kanada berechneten) ersten 10 Millionen Nachkommastellen der Dezimalentwicklung π. Die einzelnen Ziffern traten unter diesen ersten 10 Millionen Stellen mit folgenden Häufigkeiten auf: (in der linken Tabelle die von S. Wagon [152] angegebenen Häufigkeiten, in der rechten zum Vergleich die von Y. Kanada [60] im Jahr 1997 errechneten entsprechenden Häufigkeiten unter den ersten 50 Milliarden Nachkommastellen von π)

Ziffer	*Häufigkeit*
0	999 440
1	999 333
2	1 000 306
3	999 964
4	1 001 093
5	1 000 466
6	999 337
7	1 000 207
8	999 814
9	1 000 040
	10 000 000

Ziffer	*Häufigkeit*
0	5 000 012 647
1	4 999 986 263
2	5 000 020 237
3	4 999 914 405
4	5 000 023 598
5	4 999 991 499
6	4 999 928 368
7	5 000 014 860
8	5 000 117 637
9	5 000 990 486
	50 000 000 000

Hier zeigen sich also keine Abweichungen von "zufälligem Verhalten", die relative Häufigkeit für das Auftreten der einzelnen Ziffern beträgt jeweils etwa 1/10. Die Geschwindigkeit, mit der sich die relativen Häufigkeiten dem Wert 1/10 annähern, stimmt ebenfalls mit der wahrscheinlichkeitstheoretisch anzunehmenden von etwa $1/\sqrt{n}$ überein. So betragen etwa die relativen Häufigkeiten für das Auftreten der Ziffer "7" unter den ersten 10^i Nachkommastellen von π $(i = 1, \ldots, 7)$ 0, .08, .095, .097, .10025, .0998, .1000207.

Auch der sogenannte "*poker test*" ergibt keine überaschenden Abweichungen von den zu erwartenden Werten. Bei diesem Test werden stets fünf aufeinanderfolgende Ziffern in Hinblick auf *poker hands* überprüft, ob also etwa vier Gleiche, zwei Pärchen etc. auftreten. Für die ersten 10 Millionen dezimalen Nachkommastellen von π ergeben sich (wieder laut S. Wagon [152]) folgende Häufigkeiten:

Typ	*Erwartete Anzahl*	*Tatsächliche Anzahl*
Keine zwei Gleichen	604 800	604 976
Ein Pärchen	1 008 000	1 007 151
Zwei Pärchen	216 000	216 520
Drei Gleiche	144 000	144 375
Full House	18 000	17 891
Vier Gleiche	9 000	8 887
Fünf Gleiche	200	200

Natürlich kann durch Überprüfung einer endlichen Anzahl von Nachkommastellen einer Zahl niemals eine Aussage bezüglich Normalität getroffen werden. Dennoch meint S. Wagon [152]: *digit-hunting has an importance that goes beyond the mere extension of the known decimal places of* π. Nebenbei bemerkt sind seit dem erstmaligen Auffinden der Ziffernfolge "123456789" in der Dezimalentwicklung von π (durch Y. Kanada) diverse Gedankenspielereien von L.E.J. Brouwer und anderen sogenannten "Intuitionisten" gewissermaßen gegenstandslos geworden, welche auf der Unentscheidbarkeit der Frage "Tritt in der Dezimalentwicklung von π jemals die Ziffernfolge 123456789 auf?" basieren.

Nun zurück zum vorhin angesprochenen Artikel von Bailey und Crandall [6], betitelt "*On the random character of fundamental constant expansions*". Die darin enthaltenen Überlegungen basiseren auf folgender zentraler Hypothese, von Bailey und Crandall als "*Hypothesis A*", von J.C. Lagarias [72] später als "*Strong Dichtomy Hypothesis*" bezeichnet:

Hypothese 7.0.1 (Hypothese A) *Gegeben seien zwei Polynome* $p(n), q(n)$ *mit ganzzahligen Koeffizienten sowie eine Funktion* r_n *durch*

$$r_n = p(n)/q(n).$$

Weiters gelte für die Grade der Polynome $0 \leq \deg\, p < \deg\, q$*, und die Funktion* r_n *besitze bei keiner natürlichen Zahl* n *eine Singularität. Sei* $\beta \geq 2$ *eine ganze Zahl und* $x_0 = 0$*. Dann besitzt die Folge* $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$*, rekursiv definiert durch*

$$x_n = \{\beta x_{n-1} + r_n\},$$

entweder einen finiten Attraktor oder ist gleichverteilt modulo 1.

Der darin enthaltenen Ausdruck “finiter Attraktor” (*finite attractor*) wird folgendermaßen definiert:

Definition 7.0.1 *Eine Folge $x = x_0, x_1, x_2, \dots$ mit Werten aus $[0, 1)$ besitzt einen “finiten Attraktor” $W = (w_0, w_1, \dots, w_{P-1})$ genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $K = K(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $k \geq 0$ die Ungleichung $\|x_{K+k} - w_{t(k)}\| < \epsilon$ für eine Funktion $t(k)$ mit $t(k) \in \mathbb{Z}$ unf $0 \leq t(k) < P$ erfüllt ist.*

Dabei ist die Norm $\|a\|$ einer rellen Zahl $a \in [0, 1)$ definiert als $\min(a, 1 - a)$. Wir definieren nun auch noch den Ausdruck “periodischer Attraktor” (*periodic attractor*):

Definition 7.0.2 *Eine Folge $x = x_0, x_1, x_2, \dots$ mit Werten aus $[0, 1)$ besitzt einen “periodischen Attraktor” $W = (w_0, w_1, \dots, w_{P-1})$ genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $K = K(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $k \geq 0$ die Ungleichung $\|x_{K+k} - w_{k \ mod \ P}\| < \epsilon$ erfüllt ist.*

Satz 7.0.4 *Sei $x = x_0, x_1, x_2, \dots$ eine Folge mit Werten aus $[0, 1)$ und $y = y_0, y_1, y_2, \dots$ eine konvergente Folge. Dann besitzt x einen finiten (bzw. periodischen) Attraktor genau dann, wenn die Folge $\{x_0+y_0\}, \{x_1+y_1\}, \{x_2+y_2\}, \dots$ einen finiten (bzw. periodischen) Attraktor besitzt.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus den beiden vorhergehenden Definitionen. $\square$

Satz 7.0.5 *Die in Hypothese A definierte Folge x besitzt unendlich viele verschiedene Elemente und daher zumindest einen Häufungswert.*

Beweis: Bezeichne D die Menge aller verschiedenen Differenzen $\|x_n - \beta x_{n-1}\|$ für $n \in \mathbb{N}^+$. Wäre diese Menge endlich, müsste sie über ein kleinstes Element verfügen. Da aber die Werte von r_n für hinreichend großes n beliebig klein (und dabei nicht gleich Null) werden, wie sich aus der Bedingung für die Grade der Polynome $p(n)$ und $q(n)$ ergibt, kann die Annahme nicht richtig sein.
Die Folge x besitzt also unendlich viele verschiedene Werte und deshalb mindestens einen Häufungswert. $\square$

Satz 7.0.6 *Sei a eine reelle und $\beta \geq 2$ eine ganze Zahl. Falls die Folge $x = \{a\}, \{\beta a\}, \{\beta^2 a\}, \dots$ einen finiten Attraktor W besitzt, dann ist W auch ein periodischer Attraktor und hat notwendigerweise die Form*

$$W = (w_0, \{\beta w_0\}, \{\beta^2 w_0\}, \dots, \{\beta^{P-1} w_0\})$$

für passendes P. Außerdem ist w_0 eine rationale Zahl.

Beweis: Sei $W = (w_0, w_1, \ldots, w_{P-1})$ der laut Voraussetzung gegebene finite Attraktor zu x. Wir setzen $d = \min_{0 \le i,j < P}(\|w_i - w_j\|)$ und $\epsilon < d/(4\beta)$.

Bezeichne W_ϵ die Menge aller Zahlen $z \in [0,1)$, welche $\|z - w_i\| < \epsilon$ für zumindest ein i mit $0 \le i < P$ erfüllen. Dann existiert laut Voraussetzung ein $K'(\epsilon)$, sodass $x_k \in W_\epsilon$ für alle $k > K'$ gilt. Sei K das kleinste $k > K'$, welches $\|x_k - w_0\| < \epsilon$ erfüllt (Es ist, wie Bailey und Crandall zu erwähnen vergessen, nicht selbstverständlich, dass überhaupt ein solches k existiert. Das ist nur dann der Fall, wenn der finitite Attraktor W keine "überflüssigen" Elemente enthält. Wir wollen dies stillschweigend voraussetzen).
Dann gilt

$$\|x_{K+1} - \beta w_0\| = \|\beta x_K - \beta w_0\| = \beta \|x_K - w_0\| < \beta\epsilon < d/4.$$

Die zweite Gleichung folgt aus der *dilated-norm rule*, welche besagt, dass für $0 \le \delta \le 1/(2\|z\|)$ die Gleichheit $\|\delta z\| = \delta \|z\|$ gilt. Die Richtigkeit dieser *rule* ist unmittelbar einsichtig, und die Anwendbarkeit auf den obigen Fall wegen des hinreichend kleinen ϵ gewährleistet.

Es gilt also $\|x_{K+1} - \beta w_0\| < \beta\epsilon$, genauso folgt aus $\|x_{K+k} - w_0\| < \epsilon$ stets $\|x_{K+k+1} - \beta w_0\| < \beta\epsilon$, und es gibt unendlich viele solcher k (wieder weil W keine "überflüssigen" Elemente enthält).

Da es nur ein einziges Element von W mit Normabstand $\le d/4$ von $\{\beta w_0\}$ geben kann, muss dieses Element $\{\beta w_0\}$ sein. Sei also oBdA. $w_1 = \{\beta w_0\}$. Dasselbe Argument wie oben läßt sich weiter wiederholen, bis schließlich $w_{P-1} = \{\beta^{P-1} w_0\}$ folgt. x_{K+P} schließlich muss in einer $\beta\epsilon$-Umgebung um w_0 liegen, da sonst kein weiterer Wert in diese Umgebung fallen würde und somit w_0 nicht in W enthalten wäre (da W keine "überflüssigen" Elemente enthält).

Damit ist also W ein periodischer Attraktor der Folge x.
Dass die Elemente von W rationale Zahlen sein müssen folgt aus der Bedinung $w_0 = \{\beta^P w_0\}$, welche $w_0 = m/(\beta^P - 1)$ für ein passendes ganzzahliges m bedingt. □

Satz 7.0.7 *Falls die Folge $x = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ definiert wie in Hypothese A, einen finiten Attraktor W besitzt, dann ist W ein periodischer Attraktor und jedes Element von W rational.*

Beweis: Die Folge x ist, wie in Hypothese A, gegeben durch $x_0 = 0$ und $x_n = \beta x_{n-1} + r_n$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Sei $W = (w_0, w_1, \ldots, w_{P-1})$ der finite Attraktor zur Folge x.

Wir setzen $d = \min_{0 \le i,j < P}(\|w_i - w_j\|)$, und wählen $0 < \epsilon < d/(4\beta + 4)$. Bezeichne W_ϵ die Menge aller $z \in [0,1)$, welche $\|z - w_i\| < \epsilon$ für zumindest ein i mit $0 \le i < P$

erfüllen.

Dann existiert ein $K'(\epsilon)$, so dass $x_k \in W_\epsilon$ und $|r_k| < \epsilon$ für alle $k > K'$ gilt. Bezeichne K das erste $k > K'$, welches $\|x_k - w_0\| < \epsilon$ erfüllt (ein solches k existert wieder nur dann, wenn W keine "überflüssigen" Elemente enthält). Dann erhalten wir (wiederum aus der *dilated-norm rule*)

$$\|x_{K+1} - \beta w_0\| = \|\beta x_K + r_{K+1} - \beta w_0\| \leq \beta\|x_K - w_0\| + \epsilon < (\beta + 1)\epsilon < d/4.$$

Der Rest des Beweises kann nun ebenso wie im Beweis von Satz 7.0.6 durchgeführt werden. □

Satz 7.0.8 *Sei $a \in [0, 1)$. Die Folge $a, \{\beta a\}, \{\beta^2 a\}, \{\beta^3 a\}, \ldots$ besitzt einen finiten Attraktor genau dann, wenn a rational ist.*

Beweis: Falls die angegebene Folge einen finiten Attraktor besitzt, dann laut Satz 7.0.6 ebenfalls einen periodischen Attraktor. Wenn wir $\epsilon = 1/(4\beta)$ setzen, dann existiert laut Definition 7.0.2 ein K, für welches $\|x_{K+k} - w_{k \bmod P}\| < \epsilon$ für alle $k \geq 0$ gilt.

Wir setzen $h = |x_K - w_0|$. Falls $h > 0$ gilt, sei $m = \lfloor \log_\beta(\epsilon/h) \rfloor$, und damit $\beta^m h < \epsilon < \beta^{m+1} h < \beta\epsilon < 1/4$. Dann erhalten wir (wieder unter Anwendung der *dilated-norm rule*)

$$\|x_{K+m+1} - w_{m+1 \bmod P}\| = \|\beta^{m+1} x_K - \beta^{m+1} w_0\| = \beta^{m+1}\|x_K - w_0\| = \beta^{m+1} h > \epsilon.$$

Dies wiederspricht Definition 7.0.2, weswegen $h = 0$ und damit $x_{K+k} = w_{k \bmod P}$ für alle $k \geq 0$ sein muss.
Es gilt also, dass sich die Ziffern der Nachkommastellen der β-adischen Entwicklung von a nach den ersten K Ziffern mit Periode P zu wiederholen beginnen. Daher ist a eine rationale Zahl.

Umgekehrt, wenn $a = p/q$ eine rationale Zahl ist, muss klarerweise die Folge $a, \{\beta a\}, \{\beta^2 a\}, \{\beta^3 a\}, \ldots$ periodisch sein und damit einen finiten Attraktor besitzen. □

Satz 7.0.9 *Seien $p(n)$ und $q(n)$ zwei Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Dabei besitze q bei keiner positiven ganzen Zahl eine Nullstelle, und es gelte $0 \leq \deg p < \deg q$. Weiters gegeben seien eine Basis $\beta \geq 2$ und eine reelle Zahl a mit einer verallgemeinerten polylogarithmischen Entwicklung (*generalized polylogarithm series*) der Form*

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^k} \frac{p(k)}{q(k)}.$$

Dann ist a rational genau dann, wenn die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit $x_0 = 0$ und

$$x_n = \left(\beta x_{n-1} + \frac{p(n)}{q(n)}\right) \textit{ mod } 1$$

einen finiten (bzw. periodischen) Attraktor besitzt.

Beweis: Laut dem vorigen Satz (Satz 7.0.8) besitzt die Folge $\{a\}, \{\beta a\}, \{\beta^2 a\}, \{\beta^3 a\}, \ldots$ genau dann einen periodischen Attraktor, wenn a rational ist. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \{\beta^n a\} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^{n-k} p(k)}{q(k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\beta^{n-k} p(k)}{q(k)}\right) \text{ mod } 1 \\ &= (x_n + t_n) \text{ mod } 1, \end{aligned}$$

mit einer Folge x, durch die Rekursion $x_0 = 0$ bzw.

$$x_n = \beta x_{n-1} + \frac{p(n)}{q(n)},$$

sowie einer *tail sequence* t, durch

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^k} \frac{p(k+n)}{q(k+n)}$$

definiert. Falls nun, wie in Hypothese A, $\textit{deg}\, p < \textit{deg}\, q$ gilt, dann existiert zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein n mit

$$\left|\frac{p(n+k)}{q(n+k)}\right| < \epsilon$$

für alle $k \geq 1$. Für solches n gilt auch

$$|t_n| < \epsilon \sum_{k \geq 1} \beta^{-k} = \frac{\epsilon}{\beta - 1} \leq \epsilon.$$

Daher ist $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Laut Satz 7.0.4 besitzt also die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ einen periodischen Attraktor genau dann wenn a rational ist. $\square$

Satz 7.0.10 *Falls Hypothese A zutrifft, ist jede der Konstanten $\pi, \log 2$ und $\zeta(3)$ normal zur Basis 2 und $\log 2$ normal zur Basis 3. Außerdem ist $\zeta(5)$, falls irrational, normal zur Basis 2.*

Beweis: Die Irrationalität der Konstanten $\pi, \log 2$ und $\zeta(3)$ ist bekannt. Eine verallgemeinerte polylogarithmische Entwicklung, wie in Satz 7.0.9 vorausgesetzt, ist für jede dieser Konstanten und ebenso für $\zeta(5)$ vorhanden (siehe Gleichungen (7.1) bis (7.4)). Aus Hypothese A (sofern zutreffend) folgt dann sofort die Behauptung des Satzes. □

Die für Satz 7.0.9 benötigten verallgemeinerten polylogarithmischen Entwicklungen von $\pi, \log 2, \zeta(3)$ und $\zeta(5)$ sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \tag{7.1}$$

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{81^n} \frac{2}{27} \left(\frac{9}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \right) \tag{7.2}$$

$$= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9^n \, (2n-1)}$$

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \tag{7.3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{120n^2 + 151n + 47}{512n^4 + 1024n^3 + 712n^2 + 194n + 15}$$

$$\begin{aligned} \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4096^n} \frac{8}{7} \Bigg(& \frac{3}{(1+24m)^3} - \frac{21}{(2+24m)^3} + \frac{12}{(3+24m)^3} + \frac{15}{(4+24m)^3} \\ & - \frac{3}{4(5+24m)^3} + \frac{3}{2(6+24m)^3} + \frac{3}{8(7+24m)^m} - \frac{3}{2(9+24m)^3} - \frac{21}{16(10+24m)^3} \\ & - \frac{3}{32(11+24m)^3} - \frac{3}{4(12+24m)^3} - \frac{3}{64(13+24m)^3} - \frac{21}{64(14+24m)^3} \\ & - \frac{3}{16(15+24m)^3} + \frac{3}{256(17+24m)^3} + \frac{3}{128(18+24m)^3} - \frac{3}{512(19+24m)^3} \\ & + \frac{15}{256(20+24m)^3} + \frac{3}{128(21+24m)^3} - \frac{21}{1024(22+24m)^3} + \frac{3}{2048(23+24m)^3} \Bigg) \end{aligned} \tag{7.4}$$

Eine ähnliche Gleichung wie (7.4) existiert auch für $\zeta(5)$ (siehe D.J. Broadhurst [15]), und zwar in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{60})^n} \frac{p(n)}{q(n)}$$

mit Polynomen p und q von Grad 590 bzw. 595, welche hier aus Platzgründen nicht angeführt werden sollen.

Natürlich gibt es über die hier besprochenen Konstanten hinaus viele weiter Zahlen mit einer Darstellung als verallgemeinerte polylogarithmische Reihe. Einige Beispiele finden sich etwa ebenfalls bei Bailey und Crandall [6]. In einem auf den hier vorgestellten Überlegungen basierenden Artikel verallgemeinert J.C. Lagarias [72] einige Resultate und stellt sie in einen weiteren Zusammenhang. Bei Bailey und Crandall [6] sieht er *a basic mechanism underlying their principle, which is a relation between single orbits of two discret dynamical systems.*

In seinem Artikel "*One hundret years of normal number*" stellt G. Harman [49] drei Aufgaben, seiner Meinung nach *a great challenge for mathematicians of the coming century (or millennium!)*:

- *Determine whether or not* $\sqrt{2}, e$ *or* π *are normal.*
- *Find one base to which* $\sqrt{2}$ *is simply normal, or prove that no such base exists.*
- *Find a base* $\beta > 2$ *for which each of* $0, \ldots, \beta - 1$ *occurs infinitely often in the base* β *expansion of* $\sqrt{2}, e, \pi$.

Der Autor der vorliegenden Diplomarbeit sah sich leider außerstande, auch nur eine einzige dieser Aufgaben korrekt zu lösen.

Kapitel 8

Verallgemeinerungen

Normalität läßt sich nicht nur für reelle Zahlen definieren, sondern es sind darüber hinaus viele Verallgemeinerung möglich, von denen einige hier vorgestellt werden sollen.

8.1 Normalität bezüglich Folgen

Definition 8.1.1 *Eine reelle Zahl a heißt "normal bezüglich einer Folge" $\Lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, oder auch "$\Lambda$-normal", wenn die Folge $a\lambda_1, a\lambda_2, a\lambda_3, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 ist.*

Wie wir in Kapitel 2.4 gesehen haben, ist eine Zahl genau dann normal zur Basis β, wenn die Folge $a, a\beta, a\beta^2, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 ist. Also ist a normal zur Basis β genau dann, wenn a normal bezüglich der Folge $1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots$ ist. Insofern kann die hier gegebene Definition für Normalität bezüglich Folgen als Verallgemeinerung der in Kapitel 2.1 angeführten Definition normaler Zahlen aufgefasst werden.

Es kann von Interesse sein, bezüglich einer gegebenen Folge normale Zahlen zu finden bzw. zu konstruieren. Aus dem Kronecker'schen Approximationssatz (siehe 2.2.2) folgt beispielsweise, dass eine reelle Zahl genau dann normal bezüglich der Folge $1, 2, 3, \ldots$ ist, wenn sie irrational ist.

Diverse Resultate zu bezüglich Folgen normalen Zahlen bzw. Konstruktionen von Zahlen, die bezüglich gegebener Folgen normal sind, finden sich etwa bei G. Larcher [73], der bezüglich der Folge der Fibonacci-Zahlen normale Zahlen konstruiert, oder bei T. Šalát [122], der einen Zusammenhang mit Cantor'schen Reihen herstellt.

8.2 Normale Mengen

Der Begriff “normale Menge” (*ensemble normal*) stammt von M. Mèndes France. Er führte, ausgehend von Normalität einer Zahl bezüglich einer Folge bzw. Λ-Normalität (siehe Kapitel 8.1) folgende Definitionen an:

Definition 8.2.1 *Bezeichne $B(\Lambda)$ die Menge aller Λ-normalen Zahlen. Eine Menge reeller Zahlen E heißt “normal”, wenn es eine Folge Λ mit $E = B(\Lambda)$ gibt.*

Eine Menge E ist also normal genau dann, wenn es eine Folge Λ gibt sodass $a\Lambda$ gleichverteilt modulo 1 dann und nur dann ist, wenn $a \in E$ gilt. Beispiele normaler Mengen sind etwa folgende:

Beispiel 8.2.1 *Die leere Menge ist eine normale Menge. Wir wählen als Folge Λ eine konstante Folge, also etwa $1, 1, 1, \ldots$. Dann gibt es keine Zahl a, sodass $a\Lambda = a, a, a, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 ist. Daher ist die leere Menge normal.*

Beispiel 8.2.2 *Die Menge $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine normale Menge. Um dies zu sehen, wählen wir $\Lambda = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Fejer (siehe etwa E. Hlawka [52, S. 23]).*

Beispiel 8.2.3 *Die Menge der irrationalen Zahlen, also $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ist eine normale Menge. Diese Behauptung folgt mit $\Lambda = 1, 2, 3, \ldots$ aus dem Kronecker'schen Approximationssatz (siehe Kapitel 2.2.2, S. 10).*

Zahlreiche Ergebnisse über normale Mengen finden sich in den Arbeiten von M. Mendès France, etwa in [88], [87], [35] (gemeinsam mit F. Dress, siehe auch Dress [34]) und [78] (gemeinsam mit J. Lesca). Alle diese Artikel sind in französischer Sprache verfasst.

8.3 Normale k-Tupel

Dieses Konzept geht auf John E. Maxfield [84] zurück, der es im Jahr 1953 vorstellte.

Definition 8.3.1 *Als ein k-Tupel* $\mathbf{a}$ *bezeichnen wir ein k-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, wobei alle a_i reelle Zahlen seien.*

Definition 8.3.2 *Als n-te k-Ziffer $\mathbf{a}(n)$ eines k-Tupels* $\mathbf{a}$ *zur Basis β bezeichnen wir*

$$\mathbf{a}(n) = \big(a_1(n), a_2(n), \ldots, a_k(n)\big),$$

wobei $a_i(n)$ die n-te Nachkommaziffer des Bruchteils $\{a_i\}$ von a_i zur Basis β bezeichnet.

Definition 8.3.3 *Ein k-Tupel* $\mathbf{a}$ *heißt "einfach normal" zur Basis β, wenn die Anzahl $N(b, \mathbf{A}_n)$ des Vorkommens einer k-Ziffer b unter den ersten n k-Ziffern $\mathbf{A}_n$ von* $\mathbf{a}$ *die Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(b, \mathbf{A}_n)}{n} = \frac{1}{\beta^k}$$

für alle β^k möglichen Werte von b erfüllt.

Definition 8.3.4 *Ein k-Tupel* $\mathbf{a}$ *heißt "normal" zur Basis β, wenn jedes der k-Tupel* $\mathbf{a}, \beta\mathbf{a}, \beta^2\mathbf{a}, \ldots$ *einfach normal zu jeder der Basen $\beta, \beta^2, \ldots$ ist.*

Wir bemerken, dass mit $\mathbf{a}$ auch jedes darin enthaltene m-Tupel für $m \leq k$ normal ist, also mit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ auch $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$.

Definition 8.3.5 *Die einem k-Tupel* $\mathbf{a}$ *"entsprechende reelle Zahl zur Basis β" (*corresponding number*) ist die reelle Zahl $a = 0.a_1a_2\ldots$ zur Basis β, wobei*

$$a_{(n-1)k+1}, \ldots, a_{nk}$$

die n-te k-Ziffer von $\mathbf{a}$ *zur Basis β sei.*

Ein zentrales Ergebnis ist nun der folgende Satz:

Satz 8.3.1 *Ein k-Tupel ist normal zur Basis β genau dann, wenn die entsprechende reelle Zahl normal zu derselben Basis ist.*

Beweis: Sei $\mathbf{a}$ ein zur Basis β normales k-Tupel. Daher ist die entsprechende reelle Zahl a einfach normal zu den Basen $\beta^k, \beta^{2k}, \ldots$. Damit ist a normal zur Basis β laut Satz 2.3.2.

Sei umgekehrt a, die einem k-Tupel $\mathbf{a}$ entsprechende reelle Zahl, normal zur Basis β. Dann sind insbesondere $a, \beta^k a, \beta^{2k} a, \ldots$ einfach normal zu allen Basen $\beta^k, \beta^{2k}, \ldots$, und somit ist $\mathbf{a}$ normal zur Basis β. $\square$

Viele Ergebisse, die wir für Normalität reeller Zahlen vorgestellt haben, lassen sich problemlos auf Normalität von k-Tupeln übertragen. Es gelten etwa die folgenden Sätze:

Satz 8.3.2 *Ein k-Tupel* $\mathbf{a}$ *ist normal zur Basis β genau dann, wenn* $\mathbf{a}$ *einfach normal zu allen Basen $\beta, \beta^2, \ldots$ ist.*

Satz 8.3.3 *Das k-Tupel* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *ist normal zur Basis β genau dann, wenn die Folge* $\mathbf{a}, \beta\mathbf{a}, \beta^2\mathbf{a}, \ldots$ *gleichverteilt modulo 1 im $\mathbb{R}^k$ ist.*

Damit ergibt sich durch das Weyl'sche Kriterium für den mehrdimensionalen Fall folgende Proposition:

Proposition 8.3.1 *Das k-Tupel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ist normal zur Basis β genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{k} h_i a_i$ für alle $(h_1, h_2, \ldots, h_k) \in \mathbb{Z}^k \backslash \{0\}$ normal ist.*

Daraus folgt nun ein hinreichendes Kriterium dafür, dass die Summe normaler Zahlen wieder normal ist.

Proposition 8.3.2 *Wenn das k-Tupel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ normal zur Basis β ist, dann ist auch die reelle Zahl $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ normal zu derselben Basis.*

Für die Beweise der vorhergehenden Sätze sowie weitere Aussagen über normale k-Tupel siehe J.E. Maxfield [84].

8.4 Normalität bezüglich Matrizen

Ergebnisse zu Normalität bezüglich Matrizen finden sich unter anderem bei W.M. Schmidt [124] und J. Cigler [28]. Wir wollen hier nur ganz kurz darauf eingehen.

Definition 8.4.1 *Ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ heißt "normal bezüglich einer reellen $k \times k$-Matrix $\mathcal{A}$", wenn die Folge der Vektoren $\mathbf{a}, \mathcal{A}\mathbf{a}, \mathcal{A}^2\mathbf{a}, \ldots$ gleichverteilt modulo 1 im $\mathbb{R}^k$ ist.*

Definition 8.4.2 *Eine $k \times k$-Matrix $\mathcal{A}$ heißt "gut", wenn fast alle Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ normal bezüglich $\mathcal{A}$ sind.*

Der Ausdruck "fast alle" in der vorigen Definition versteht sich natürlich bezüglich des k-dimensionalen Lebesgue-Maßes.

Definition 8.4.3 *Eine $k \times k$-Matrix mit rationalen Einträgen, die ausschließlich ganz algebraische Eigenwerte besitzt heißt "fast ganz".*

Satz 8.4.1 *Eine fast ganze Matrix $\mathcal{A}$ ist genau dann gut, wenn weder 0 noch Einheitswurzeln als Eigenwerte vorkommen.*

Definition 8.4.4 *Wir schreiben "$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$", wenn $\mathcal{A}^p = \mathcal{B}^q$ für positive natürliche Zahlen p und q gilt. Weiters schreiben wir "$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$", wenn jeder bezüglich $\mathcal{A}$ normale Vektor auch normal bezüglich $\mathcal{B}$ ist.*

Satz 8.4.2 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ fast ganz und gut, und außerdem sei $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Dann gilt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Satz 8.4.3 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ fast ganz und gut. Außerdem sei $\mathcal{A} \not\sim \mathcal{B}$, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, und alle Eigenwerte von $\mathcal{B}$ mögen Beträge größer als 1 haben. Dann gilt $\mathcal{A} \not\Rightarrow \mathcal{B}$.*

Die Beweise all dieser Sätze finden sich bei W.M. Schmidt [124].

8.5 (j, ϵ)-Normalität

(j, ϵ)-Normalität bietet eine Möglichkeit, auch für ganze Zahlen eine gewisse "Normalitätseigenschaft" definieren zu können. Natürlich kann eine ganze Zahl nie normal im Sinn der Definition in Kapitel 2.1 sein, da alle Nachkommastellen gleich 0 sind. Dennoch kann es wichtig sein, etwas über die Verteilung verschiedener Ziffern in der β-adischen Entwicklung ganzer Zahlen zu wissen, etwa um auch Abschätzungen über die Häufigkeit des Auftretens gewisser Ziffernblöcke in den Nachkommastellen bestimmter reeller Zahlen angeben zu können. Eine solche Vorgangsweise wird in Kapitel 4.2 zum Beweis der Normalität der Copeland-Erdös-Zahlen verwendet.

(j, ϵ)-Normalität wurde von A.S. Besicovitch [10] anno 1934 erdacht. Er gibt folgende Definitionen an (es existieren auch andere, leicht abweichende Definitionen, was gelegentlich für Verwirrung sorgt):

Definition 8.5.1 *Gegeben sei eine endliche, l-elementige Menge E von Ziffern (zur Basis β), und bezeichne $N(E, b)$ jene Anzahl, mit der die Ziffer b in E enthalten ist. Für eine ganzen Zahl $m = a_n a_{n-1} \dots a_0$ bezeichne $N(m, b)$ jene Anzahl, mit der die Ziffer b in der Ziffernentwicklung von m aufscheint, und zu jeder natürlichen Zahl $j \geq 1$ und jedem j-stelligem Ziffernblock $b_1 b_2 \dots b_j$ bezeichne $N(m, b_1 b_2 \dots b_j)$ jene Anzahl, mit der der Ziffernblock $b_1 b_2 \dots b_j$ in der Ziffernentwicklung von m aufscheint. Zu beliebigem reellen $\epsilon > 0$ heißt nun die l-elementige Menge E "ϵ-normal", falls für jede mögliche Ziffer b (zur Basis β)*

$$\left| \frac{N(E, b)}{l} - \frac{1}{\beta} \right| < \epsilon$$

gilt. Die Zahl $m = a_n a_{n-1} \dots a_0$ heißt "ϵ-normal", falls die $n+1$-elementige Menge $E = \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0\}$ ϵ-normal ist, und m heißt "(j,ϵ)-normal", falls die Ungleichung

$$\left| \frac{N(m, b_1 b_2 \dots b_j)}{n+1} - \frac{1}{\beta^j} \right| < \epsilon$$

für alle möglichen j-stelligen Ziffernblöcke $b_1 b_2 \dots b_j$ erfüllt ist.

Zahlreiche Resultate bezüglich (j, ϵ)-Normalität stammen von R.G. Stoneham [136][137][138][139][140][141][142]. Er erklärte auch eine Form von (j, ϵ)-Normalität für gewisse Klassen rationaler Zahlen (siehe Stoneham [139][141][142]).

Einen Zusammenhang zwischen Normalität und (j, ϵ)-Normalität stellt H.A. Hanson [47] in einem Artikel über *"Some relations between various types of normality of numbers"* her. Allgemeineres zur Verteilung von Ziffern in ganzen Zahlen findet sich etwa bei L. Olsen [104] oder M. Drmota und J. Schoissengeier [36]; in diesem Zusammenhang sei auch auf einen Artikel von J.M. Dumont, P.J. Grabner und A. Thomas [39] hingewiesen.

8.6 β-Normalität

In diesem Kapitel wollen wir kurz eine Verallgemeinerung von Normalität, die sogenannte β-Normalität besprechen. Die hier vorgestellten Ergebnisse gehen auf grundlegende Resultate von B.H. Bissinger [13], C.I. Everett [42], A. Rényi [120] und W. Parry [107] zurück.,

Von A. Rényi [120] stammt die Idee der Darstellung reeller Zahlen a durch eine sogenannte "f-Entwicklung" (f-*expansion*) der Form

$$a = \varepsilon_0 + f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + f(\varepsilon_3 + \dots)\dots)\dots) \tag{8.1}$$

mit "Ziffern"

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(a),\ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(a),\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2(a),\ \dots$$

und "Resten"

$$r_n(a) = f(\varepsilon_{n+1} + f(\varepsilon_{n+2} + f(\varepsilon_{n+3} + \dots)\dots)\dots) \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

welche durch folgende Rekursion definiert werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(a) &= \lfloor a \rfloor, & r_0(a) &= \{a\} \\ \varepsilon_{n+1}(a) &= \big\lfloor \varphi\big(r_n(a)\big)\big\rfloor, & r_{n+1}(a) &= \big\{\varphi\big(r_n(a)\big)\big\}, \end{aligned}$$

wobei $x = \varphi(y)$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ bezeichnet.

Mit $f(x) = \frac{x}{\beta}$ für $\beta = 2, 3, \dots$ entspricht die f-Entwicklung einer Zahl a der gewöhnlichen Darstellung zur Basis β, $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\beta^n}$, und mit $f(x) = \frac{1}{x}$ der Kettenbruchdarstellung von a.

Rényi konnte zeigen, dass unter gewissen einfachen Bedinungen an f eine Darstellung der Form (8.1) für jede reelle Zahl a exisitert. Für eine monoton fallende Funktion f etwa sind folgende drei Bedingungen hinreichend:

- $f(1) = 1$
- $f(t)$ ist positiv, stetig und streng monoton fallend für $1 \le t \le T$ und $f(t) = 0$ für $t \ge T$ mit $2 < T \le +\infty$ $\big(T = +\infty$ bedeute dabei $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0)\big)$
- $|f(t_2) - f(t_1)| \le |t_2 - t_1|$ für $1 \le t_1 < t_2$ und es gibt eine Konstante λ mit $0 < \lambda < 1$ und $|f(t_2) - f(t_1)| \le \lambda |t_2 - t_1|$ falls $1 + f(2) < t_1 < t_2$

Für eine monoton wachsende Funktion f existiert eine Darstellung der Form (8.1) für jede reelle Zahl a etwa dann, wenn f folgende drei Bedingungen erfüllt:

- $f(0) = 0$

- $f(t)$ ist stetig und streng monoton wachsend für $0 \leq t \leq T$ und $f(t) = 1$ für $t \geq T$ mit $1 < T \leq +\infty$ $\big(T = +\infty$ bedeutet dabei $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1\big)$

- $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} < 1$ für $0 \leq t_1 < t_2$

W. Parry [107] betrachtete nun spezielle f-Entwicklungen der Form

$$x = \varepsilon_0(x) + \frac{\varepsilon_1(x)}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \dots$$

Dies ist eine f-Entwicklung mit

$$f = \frac{x}{\beta},$$

die, falls β eine ganze Zahl ≥ 2 ist, der bekannten β-adischen Entwicklung entspricht. Allerdings wird für Parry's sogenannte "β-Entwicklung" (β-*expansion*) nicht die Ganzzahligkeit von β vorausgesetzt, sondern nur $\beta > 1$.

Da wegen der Art der Definition der f-Entwicklung für die Umkehrfunktion von f keine Argumente größer oder gleich 1 auftreten können, macht es keinen Unterschied wenn wir statt der f-Entwicklung für $f = \frac{x}{\beta}$ die f-Entwicklung zur Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\beta} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{für} \quad x > \beta \end{cases}$$

betrachten. Diese Funktion erfüllt nun die weiter oben gestellten Bedingungen an monoton wachsende Funktionen, denn:

- $f(0) = \frac{0}{\beta} = 0$

- $f(t)$ ist stetig und streng monoton wachsend für $0 \leq t \leq \beta$ und $f(t) = 1$ für $t \geq \beta$. Außerdem ist $\beta > 1$.

- $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\frac{t_2-t_1}{\beta}}{t_2-t_1} = \frac{1}{\beta} < 1$ für $0 \leq t_1 < t_2$

Daher besitzt jede reelle Zahl a eine β-Entwicklung bezüglich jedem reellen $\beta > 1$.

Auch folgende Sichtweise der β-Entwicklung ist möglich: Wir definieren eine Transformation T_β durch

$$T_\beta x = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor \quad \text{für} \quad 0 \leq x < 1.$$

Dann ist die β-Entwicklung einer reellen Zahl a mit $0 \leq a < 1$ gegeben durch

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(a)\beta^{-n-1}$$

mit Koeffizienten $\varepsilon_n = \lfloor \beta T_\beta^n a \rfloor$ für $n \geq 0$.

Durch die Zuordnung $\pi_\beta(x) = \varepsilon_0(x)\varepsilon_1(x)\ldots$ ist die β-Transformation isomorph zu einer Abbildung auf den Produktraum $M^{\mathbb{N}}$, wobei M den Zustandsraum $\{0, 1, \ldots, \beta_0\}$ bezeichnet und $\beta_0 = \lfloor \beta \rfloor$ ist. Dann wird ein Maß μ_β auf $M^{\mathbb{N}}$ durch $\pi_\beta \pi_\beta^{-1}$ generiert. Näheres zu β-Entwicklung bzw. deren Realisation finden sich etwa in der Diplomarbeit von W. Steiner [135] oder bei S. Ito und Y. Takahashi [56].

Nun können wir folgende, auf S. Ito und I. Shiokawa [55] zurückgehende Definition angeben:

Definition 8.6.1 *Eine reelle Zahl $a = a_0a_1a_2\ldots$, gegeben in β-Entwicklung mit $\beta > 1$ (bzw. die zugehörige Folge $a_0a_1a_2\ldots$) heißt "β-normal", wenn für jede positive ganze Zahl k und jeden k-stelligen Ziffernblock B_k die Gleichung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} = \mu_\beta(B_k)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet wie gewohnt A_n die ersten n Ziffern von a und $N(B_k, A_n)$ jene Anzahl, mit der B_k in A_n auftritt.

Folgender Satz liefert ein Kriterium für β-Normalität:

Satz 8.6.1 *Sei a eine reelle Zahl, gegeben in β-Entwicklung, und es existiere eine Konstante C, die nur von β abhängt, so dass die Ungleichung*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(B_k, A_n)}{n} < C\mu_\beta(B_k)$$

für jeden Ziffernblock B_k beliebiger Länge gilt. Dann ist a β-normal.

Ein Beweis dieses Satz folgt unmittelbar aus A.G. Postnikov [117, Satz 6, S. 46].

Eine Konstruktion einer β-normalen Zahl liefert folgende, von S. Ito und I. Shiokawa [55] stammende, auf der Konstruktion von D.G. Champernowne (siehe Kapitel 4.1) basierende Vorgehensweise:
Ein k-stelliger Ziffernblock B_k heiße "β-zulässig" (β-*admissible*), wenn es eine reelle Zahl a mit $0 \leq a < 1$ und eine natürliche Zahl n gibt, so dass $B_k = b_1b_2\ldots b_k = \varepsilon_n(a)\varepsilon_{n+1}(a)\ldots\varepsilon_{n+k-1}(a)$ gilt. Dabei bezeichnet $\varepsilon_j(a)$ für $j \geq 0$ die j-te Ziffer der β-Entwicklung von a.

Wir bezeichnen nun die Menge aller β-zulässigen Wörter von Länge k (bzw. alle zulässigen k-stelligen Ziffernblöcke) mit W_k und die Mächtigkeit dieser Menge mit $\#W_k$. Sei

$$C_k = C_{k_1}C_{k,2}\ldots C_{k,\#W_k}$$

jener Ziffernblock von Länge $k \cdot \#W_k$, der aus allen, lexikonographisch geordneten Ziffernblöcken aus W_k besteht. Dann ist die Zahl

$$0.C_1C_2 \dots C_k \dots$$

β-normal. Ein Beweis dieser Behauptung findet sich bei Ito und Shiokawa [55]

Anmerkung: Falls β eine ganze Zahl größer als 1 ist, dann entspricht der soeben konstruierten Zahl die Champernowne-Zahl zur Basis β.

8.7 Normale Kettenbrüche

Jede irrationale Zahl a besitzt eine Darstellung der Form

$$a = \lfloor a \rfloor + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}, \tag{8.2}$$

wobei alle a_i für $i \geq 1$ positive ganze Zahlen sind. Diese Darstellung heißt "(unendliche) Kettenbruchentwicklung" bzw. "(unendliche) reguläre Kettenbruchentwicklung" (*regular continued fraction, RCF*) und besitzt den Vorteil, dass sie im Gegensatz zu den β-adischen Entwicklungen basisfrei ist. Die Koeffizienten a_i lassen sich recht einfach rekursiv berechnen.
Wir schreiben (8.2) in der Form $[\lfloor a \rfloor; a_1, a_2, a_3, \dots]$ (gelegentlich wird auch die Schreibweise $[\lfloor a \rfloor; 1/a_1, 1/a_2, 1/a_3, \dots]$ verwendet).

Rationale Zahlen besitzen ebenfalls eine (reguläre) Kettenbruchentwicklung, allerdings bricht diese nach endlich vielen Gliedern ab. Auch ist diese Darstellung für rationale Zahlen nicht ganz eindeutig, da etwa

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$$

ist. Wenn man allerdings verlangt, dass der letzte Koeffizient der (endlichen) Kettenbruchdarstellung ungleich 1 sein muss wird diese Darstellung auch für rationale Zahlen eindeutig.

Grundlegendes zu Kettenbrüchen findet man etwa bei O. Perron [110] oder C.D. Olds [103]. Nebenbei bemerkt gelang der erste Beweis für die Irrationalität von π Johann Heinrich Lambert im Jahr 1766, indem er zeigte dass $\arctan 1 = \pi/4$ eine unendliche Kettenbruchentwicklung besitzt.

Nun kann man der Kettenbruchentwicklung eine Transformation $Tx = \{1/x\}$ auf dem Einheitsintervall zuordnen (vgl. Kapitel 8.6), und es exisitert ein Wahrscheinlichkeitsmaß, bezüglich dessen T maßtreu und ergodisch ist (im Fall der β-adischen Entwicklungen ist die zugehörige Transformation $Sx = \{\beta x\}$ und das entsprechende Maß das Lebesgue-Maß). Dabei bedeutet "maßtreu", dass Bild und Urbild einer (messbaren) Menge unter der Transformation dasselbe Maß besitzen. "Ergodisch" bedeutet, dass Bild und Urbild einer Menge unter der Transformation nur dann ident sein können, wenn sie Maß 0 oder 1 besitzen (siehe etwa P. Billingsley [11]).

Das der oben genannten Transformation T zugehörige maßtreue und ergodische Wahrscheinlichkeitsmaß ist das Gauss'sche Maß, gegeben durch

$$P(dx) = \frac{dx}{(1+x)\log 2}.$$

Nun kann Normalität der Kettenbruchentwicklung irrationaler Zahlen in natürlicher Weise definiert werden. Die relative Häufigkeit für das Auftreten des Koeffizienten "1" muss bei einer Zahl, die normal bezüglich der Kettenbruchentwicklung ist, etwa gegen

$$\int_{1/2}^{1} P(dx) = \frac{\log(4/3)}{\log 2}$$

konvergieren, die relative Häufigkeit für das Auftreten des Koeffizienten "2" gegen

$$\int_{1/3}^{1/2} P(dx) = \frac{\log(9/8)}{\log 2},$$

bzw. allgemein die relative Häufigkeit für das Auftreten einer Ziffer b gegen

$$\int_{1/(b+1)}^{1/b} P(dx) = \frac{\log\left(\frac{b+1}{b}\right) - \log\left(\frac{b+2}{b+1}\right)}{\log(2)} = \frac{\log\left(\frac{(b+1)^2}{b(b+2)}\right)}{\log 2}.$$

Beispielsweise aus dem individuellen Ergodensatz kann man nun folgern, dass die Kettenbruchdarstellung fast aller reellen Zahlen normal ist (eine genaue Darstellung findet sich etwa bei P. Billingsley [11, S. 40-50]).

Manche irrationalen Zahlen besitzen sehr einfach strukturierte Kettenbruchentwicklungen, so etwa

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{5}}{2} &= [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] \\
\sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] \\
\sqrt{3} &= [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \ldots] \\
e &= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \ldots] \\
\sqrt{e} &= [1; 1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, 1, \ldots].
\end{aligned}$$

Die Kettenbruchentwicklungen aller soeben angeführten Zahlen sind ganz offensichtlich nicht normal. Allerdings besitzen nur sehr wenige Zahlen solch einfache Kettenbruchentwicklungen, etwa quadratische Irrationalzahlen oder Ausdrücke der Form $e^{1/n}$ mit $n \in \mathbb{N}^+$. Die Kettenbruchentwicklungen der meisten Zahl sind mehr oder weniger unregelmäßig, es ist etwa

$$\begin{aligned} \pi &= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots] \\ \sqrt{\pi} &= [1; 1, 3, 2, 1, 1, 6, 1, 28, 13, 1, 1, 2, 18, 1, 1, 1, 83, 1, 4, \ldots] \\ \sqrt[3]{2} &= [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, \ldots], \end{aligned}$$

und für keine dieser Zahlen ist die Frage nach Normalität der Kettenbruchentwicklung geklärt. Interessanterweise konvergiert aber für fast alle irrationalen Zahlen das geometrische Mittel der ersten n Koeffizienten der Kettenbruchentwicklung gegen eine feste Konstante, also

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = 2.685452001 \cdots = K_0,$$

wie A. Khintchine (auch z.B. "Chinčin" geschrieben) im Jahr 1935 festgestellt hat (siehe A. Khintchine [61] und auch Bailey, Borwein, Crandall [5]). Entsprechend wird die Konstante K_0 als "Khintchinesche Konstante" bezeichnet.

Eine Konstruktion eines normalen Kettenbruchs geben R. Adler, M. Keane und M. Smorodinsky [1] an. Inspiriert von der Vorgehensweise von D.G. Champernowne [23] (siehe Kapitel 4.1) reihen sie die endlichen Kettenbruchentwicklungen der rationalen Zahlen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \ldots$$

bzw. nur der gekürzten Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots$$

aneinander und enthalten dadurch jeweils einen normalen Kettenbruch. Die letzte der beiden Konstuktionen liefert die Zahl

$$[0; 2, 3, 1, 2, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots] = 0.4403388 \ldots,$$

welche als "Adler-Keane-Smorodinsky-Zahl" bezeichnet wird.

C. Kraaikamp und H. Nakada [70] stellen einen Zusammenhang zwischen Normalität bezüglich verschiedener Arten von Kettenbrüchen her. In ähnlicher Weise wie oben bezüglich der regulären Kettenbruchentwicklung (RCF) läßt sich auch Normalität bezüglich der Kettenbruchentwicklung von unten (*continued fraction from below,* *CFB*)

$$a = \lfloor a \rfloor + \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \ddots}}}, \quad a_i \geq 2,\ i \geq 1,$$

bzw. der Kettenbruchentwicklung durch näheste ganze Zahlen (*nearest integer continued fraction, NICF*)

$$a = (a) + \cfrac{\epsilon_1}{a_1 + \cfrac{\epsilon_2}{a_2 + \cfrac{\epsilon_3}{a_3 + \ddots}}}, \quad a_i \geq 2,\ \epsilon_i \in \{-1, 1\},\ \epsilon_{i+1} + c_i \geq 2,\ i \geq 1,$$

definieren, wobei (a) hier den auf die näheste ganze Zahl gerundeten Wert von a bezeichnen soll (siehe C. Kraaikamp [68] und H. Nakada [94]). Kraaikamp und Nakada [70] zeigten, dass aus Normalität bezüglich der RCF-Entwicklung auch Normalität bezüglich der BCF-Entwicklung folgt, und dass RCF-Normalität äquivalent mit NICF-Normalität ist. Insbesondere ist die Adler-Keane-Smorodinsky-Zahl auch BCF-normal und NICF-normal.

8.8 Normalität der Ordnung k

Von I.J. Good stammt der Begriff "Normalität der Ordnung k" (*normality of order* k). Eine reelle Zahl a heißt "normal der Ordnung k" (bezüglich einer Basis β), wenn in der β-adischen Entwicklung von a für eine feste ganze Zahl $k \geq 1$ jeder k-stellige Ziffernblock B_k mit einer asymptotischen relativen Häufigkeit von β^{-k} auftritt, wenn also (mit der Schreibweise von Kapitel 2.1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) = \frac{1}{\beta^k}$$

für alle k-stelligen Ziffernblöcke B_k gilt.

Somit ist eine Zahl genau dann normal der Ordnung 1, wenn sie einfach normal ist, bzw. genau dann normal, wenn sie normal der Ordnung k für alle $k \geq 1$ ist. Ergebnisse zu Normalität der Ordnung k und Konstruktionen von Zahlen, die normal der Ordnung k sind, finden sich etwa bei I.J. Good [45], C.T. Long [80], N.G. de Bruijn [20], N.M. Korobov [66] und D. Rees [119]. Einen Zusammenhang zwischen Normalität der Ordnung k und (j, ϵ)-Normalität (siehe Kapitel 8.5) stellt R.G. Stoneham [137] her.

Kapitel 9

Bemerkungen

Die vorliegende Arbeit erhebt selbstverständlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Auf viele, durchaus interessante Aspekte konnte aus Zeit- und Platzgründen nicht näher eingegangen werden. Daher seien an dieser Stelle diverse Hinweise ergänzend angefügt:

In Kapitel 3.1 wurde bereits kurz auf Verbindungen zwischen normalen Zahlen und Ergodentheorie hingewiesen. Beispielsweise T. Kamae [58][59] untersuchte normale Zahlen unter diesem Gesichtspunkt, besonders Teilfolgen normaler Folgen (siehe auch G. Helmberg [51]). Zusammenhänge zwischen normalen Zahlen und Ergodentheorie finden sich etwa auch bei M. Smorodinsky und B. Weiss [134], P. Billingsley [11] und in der Diplomarbeit von P.J. Grabner [46].

Johann Cigler erklärte "*Ein gruppentheoretisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl*", indem er statt der Transformation $Ta = \beta a - \lfloor \beta a \rfloor$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entsprechende Transformationen auf allgemeinen kompakten abelschen Gruppen betrachtete, und konnte viele Resultate auf diesen allgemeineren Fall übertragen (siehe J. Cigler [27][28] und L. Auslander [4]).

F. Schweiger [129] untersuchte "*Normalität bezüglich zahlentheoretischer Transformationen*" und beschäftigte sich mit der Frage, für welche Paare T, S von Transformationen aus T-Normalität auch S-Normalität folgt (dies ist etwa dann der Fall, wenn es $n, m, \in \mathbb{N}$ mit $T^n = S^m$ gibt).

Brown, Moran und Pearce [16] zeigten, dass sich jede reelle Zahl als Summe von vier Zahlen schreiben lässt, von denen jede nicht-normal zu allen Basen in einer Klasse S, aber normal zu allen Basen in einer Klasse R ist, wobei äquivalente Basen stets in derselben Klasse liegen müssen (vgl. Kapitel 5.3).

Unter anderem Ahn und Choe [2] sowie Choe, Hamachi und Nakada [26] betrachteten modulo 2 normale Zahlen. G.H. Choe [25] untersuchte auch "*Weighted normal numbers*".

D.H. Bailey und R.E. Crandall [7] sowie S. Pincus und B.H. Singer [113] zeigten, wie sich normale Zahlen zur Konstruktion von *maximally irregular sequences* bzw. Zufallsgeneratoren heranziehen lassen können.

L. Olsen [105] beschäftigte sich mit "*Extremely non-normal continued fractions*" (vgl. Kapitel 8.7).

In Kapitel 3.1 haben wir gezeigt, wie viele normale Zahlen es in Bezug auf des Lebesgue-Maß gibt. Ein in gewisser Hinsicht geeigneteres Mittel zur Angabe von Aussagen über die Anzahl normaler Zahlen ist die Hausdorff-Dimension (siehe F. Hausdorff [50]). Die Hausdorff-Dimension von Mengen normaler bzw. nicht-normaler Zahlen wurde recht ausführlich untersucht.
W.M. Schmidt [125] zeigte, dass die Menge aller zu keiner Basis normalen Zahlen Hausdorff-Dimension 1 besitzt.
K. Nagasaka [91] bewies, dass die Menge aller zu einer Basis β nicht-normalen Zahlen, ebenso wie die Menge der zu dieser Basis einfach normalen, aber nicht normalen Zahlen, Hausdorff-Dimension 1 besitzt.
A.D. Pollington [115] zeigte unter Verwendung eines Resultats von H.G. Eggleston [40], dass die Menge jener Zahlen, die zu allen Basen in einer Klasse R normal und zu allen Basen in einer Klasse S nicht normal sind (wobei äquivalente Basen stets in derselben Klasse liegen müssen), Hausdorff-Dimension 1 besitzt (vgl. Kapitel 5.3). Eine Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate findet sich bei Pollington [116].
Pollington untersuchte auch "*The Hausdorff dimension of a set of non-normal well approximable number*" [114], Nagasaka [92] betrachtete die Hausdorff-Dimension von Zahlen, die nur zu gewissen Basen nicht normal sind, G. Brown, W. Moran und C.E.M. Pearce [18] brachten "*Riesz products, Hausdorff dimension and normal numbers*" in Zusammenhang. Weiteres zu Hausdorff-Dimensionen im Zusammenhang mit normalen Zahlen liefern etwa M. Mendès France [86], J. Cigler [29], C.M. Colebrook [30], B. Volkmann [146] sowie L. Olsen [106].

G. Brown, W. Moran und A.D. Pollington [19] gewannen Ergebnisse darüber, was sich über Normalität bezüglich verschiedener Potenzen einer festen Zahl als Basis aussagen lässt.

M. Smorodinsky und B. Weiss [134] besprachen "*Normal sequences for Markov shifts and intrinsically ergodic subshifts*" und gaben eine entsprechende Konstruktion an, die auf der Champernowne'schen Konstruktion (siehe Kapitel 4.1) basiert.

Beispielsweise C.M. Colebrook und J.H.B. Kemperman [31] sowie B. Volkmann [147] verfassten Artikel "*On non-normal numbers*", ein Thema, mit dem sich etwa auch M.J. Pelling [109] auseinandersetzte. G. Martin [81] betrachtete "*Absolutely abnormal numbers*", L. Olsen [106] untersuchte gar "*Extremely non-normal numbers*" und zeigte, *that from a topological point of view most numbers fail to be normal in a spectacular way* und *that (in the Baire sense) most numbers are as far from beeing normal as possible.*

Literaturverzeichnis

[1] R. Adler, M. Keane und M. Smorodinsky. A construction of a number for the continued fraction transformation. *J. Number Theory* **13**:95-105, 1981.

[2] Y. Ahn und G.H. Choe. On normal numbers mod 2. *Colloq. Math.* **76**:161-170, 1998.

[3] J. Arndt und C. Haenel. π. Springer-Verlag, 2000.

[4] L. Auslander. Ergodic automorphisms. *Amer. Math. Monthly* **77**:1-19, 1970.

[5] D.H. Bailey, J.M. Borwein und R.E. Crandall. On the Khintchine constant. *Math. of Computation* **66**:417-431, 1997.

[6] D.H. Bailey und R.E. Crandall. On the random character of fundamental constant expansions. *Experiment. Math.* **10**:175-190, 2001.

[7] D.H. Bailey und R.E. Crandall. Random generators and normal numbers. *Experiment. Math.* **11**:527-546, 2002.

[8] V. Becher und S. Figueira. An example of a computable absolutely normal number. *Theor. Comp. Sci.* **270**:947-958, 2002.

[9] L. Berggren, J. Borwein und P. Borwein. *Pi: A source book.* Springer-Verlag, 1997.

[10] A.S. Besicovitch. The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers. *Math. Zeitschr.* **39**:146-156, 1935.

[11] P. Billingsley. *Ergodic theory and information.* John Wiley and Sons Inc., 1965.

[12] N.H. Bingham. Variants on the law of the iterated logarithm. *Bull. London Math. Soc.* **18**:433-467, 1986.

[13] B.H. Bissinger. A generalization of continued fractions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **50**:868-876, 1944.

[14] E. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **27**:247-271, 1909.

[15] D.J. Broadhurst. Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of $\zeta(3)$ and $\zeta(5)$. Manuskript, 1998. http://arxiv.org/abs/math.CA/9803067 (12.12.2005).

[16] G. Brown, W. Moran und C.E.M. Pearce. A decomposition theorem for numbers in which the summands have prescribed normality properties. *J. Number Theory* **24**:259-271, 1986.

[17] G. Brown, W. Moran und C.E.M. Pearce. Riesz products and normal numbers. *J. London Math. Soc.* **32**:12-18, 1985.

[18] G. Brown, W. Moran und C.E.M. Pearce. Riesz products, Hausdorff dimensions and normal numbers. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **101**:529-540, 1987.

[19] G. Brown, W. Moran und A.D. Pollington Normality with respect to powers of a base. *Duke J. Math.* **88**:247-265, 1997.

[20] N.G. de Bruijn. A combinatorial problem. *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.* **49**:758-764, 1946.

[21] J.W.S. Cassels. On a paper of Niven and Zuckermann. *Pacific J. Math.* **2**:555-557, 1952.

[22] J.W.S. Cassels. On a problem of Steinhaus about normal numbers. *Colloq. Math.* **7**:95-101, 1959.

[23] D.G. Champernowne. The construction of decimals normal in the scale of ten. *J. London Math. Soc.* **8**:254-260, 1933.

[24] K.T. Chang. A note on normal numbers. *Nanta Math.* **9**:70-72, 1976.

[25] G.H. Choe. Weighted normal numbers. *Bull. Austral. Math. Soc.* **52**:177-181, 1995.

[26] G.H. Choe, T. Hamachi und H. Nakada. Mod 2 normal numbers and skew products. *Studia Math.* **165**:53-60, 2004.

[27] J. Cigler. Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung modulo 1. *J. reine angew. Math.* **205**:91-100, 1960.

[28] J. Cigler. Ein gruppentheoretisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl. *J. reine angew. Math.* **206**:5-8, 1961.

[29] J. Cigler. Hausdorff'sche Dimensionen spezieller Punktmengen. *Math. Z.* **76**:22-30, 1961.

[30] C.M. Colebrook. The Hausdorff dimension of certain sets of nonnormal numbers. *Michigan Math. J.* **17**:103-116, 1970.

[31] C.M. Colebrook und J.H.B. Kemperman. On non-normal numbers. *Indag. Math.* **30**:1-11, 1968.

[32] A.H. Copeland und P. Erdös. Note on normal numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52**:857-860, 1946.

[33] H. Davenport und P. Erdös. Note on normal decimals. *Canad. J. Math.* **4**:58-63, 1952.

[34] F. Dress. Intersections des ensembles normaux. *J. Number Theory* **2**:352-362, 1970.

[35] F. Dress und M. Mendès France. Caractèrisation des ensembles normaux dans $\mathbb{Z}$. *Acta Arith.* **17**:115-120, 1970.

[36] M. Drmota und J. Schoissengeier. Digital expansions with respect to different bases. *Monatsh. f. Math.* **138**:31-59, 2003.

[37] M. Drmota und R.F. Tichy. *Sequences, discrepancies and applications*. Springer-Verlag, 1997.

[38] S. Ducray. Normal sequences. *J. Univ. Bombay (NS)* **31**:1-4, 1962/63.

[39] J.M. Dumont, P.J. Grabner und A. Thomas. Distribution of the digits in the expansions of rational integers in algebraic bases. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **65**:469-492, 1999.

[40] H.G. Eggleston. Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory. *Proc. London Math. Soc.* **54**:42-93, 1951-52.

[41] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, 2002.

[42] C.I. Everett. Representations for real numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52**:861-869, 1946.

[43] I.S. Gal und L. Gal. The discrepancy of the sequence $(2^n x)$. *Indag. Math.* **26**:129-143, 1964.

[44] M. Gardner. Some comments by Dr. Martix on symmetrics and reversals. *Scientific American*, Jan 1965:110-116.

[45] I.J. Good. Normal recurring decimals. *J. London Math. Soc.* **21**:167-169, 1946.

[46] P.J. Grabner. *Normale Zahlen*. Diplomarbeit, TU Wien, 1989.

[47] H.A. Hanson. Some relations between various types of normality of numbers. *Canad. J. Math.* **6**:477-485, 1954.

[48] G.H. Hardy und E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press, Oxford, 2003.

[49] G. Harman. One hundret years of normal numbers. *Number theory for the millennium* II:149-166, 2002.

[50] F. Hausdorff. Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.* **79**:157-179, 1918.

[51] G. Helmberg. On subsequences of normal sequences. *Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics II (Wiesenthal 1986)*:70-71, 1987.

[52] E. Hlawka. *Theorie der Gleichverteilung.* Bibliographisches Inst., Mannheim, Wien, 1979.

[53] L. Hua. Additive theory of prime numbers. *Amer. Math. Soc.*, 1965.

[54] M.N. Huxley. *The distribution of prime numbers.* Oxford Univ. Press, 1972.

[55] S. Ito und I. Shiokawa. A construction of β-normal sequences. *J. Math. Soc. Japan* **27**:20-23, 1975.

[56] S. Ito und Y. Takahashi. Markov subshifts and realization of β-expansions. *J. Math. Soc. Japan* **26**:33-55, 1974.

[57] T. Kamae. Cyclic extensions of odometer transformations and spectral disjointness. *Israel J. Math.* **59**:41-63, 1987.

[58] T. Kamae. Normal numbers and ergodic theory. *Proceedings of the third Japan-USSR symposium on propability theory (Tashkent 1975), Lecture notes in Mathematics* **550**:253-269, 1976.

[59] T. Kamae. Subsequences of normal sequences. *Israel J. Math.* **16**:121-147, 1973.

[60] Y. Kanada und D. Takahashi. Calculation of π to 51.5 billion decimal digits on distributed parallel processors (japanisch). *Trans. Inform. Process. Soc. Japan* **39**:519-528, 1998.

[61] A. Khintchine. *Kettenbrüche.* Teubner, 1956.

[62] A. Khintchine. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Fund. Math.* **6**:9-20, 1924.

[63] J.F. Koksma. *Diophantische Approxiamationen.* Ergebnisse der Mathematik, IV, 4, 1936.

[64] A. Kolmogoroff. Über die Summen durch Zufall bestimmter unabhängiger Größen. *Math. Ann.* **99**:309-319, 1928.

[65] N.M. Korobov. Distribution of fractional parts of exponential function. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* **21**:42-46, 1966.

[66] N.M. Korobov. Normal periodic systems and their applications to the estimation of sums of fractional parts. *Amer. Math. Soc. Trans. Ser. (2)* **4**:31-38, 1956.

[67] N.M. Korobov. Numbers with bounded quotient and their applications to questions of Diophantine approximation. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **19**:361-380, 1955.

[68] C. Kraaikamp. A new class of continued fraction expansions. *Acta Arith.* **57**:1-39, 1991.

[69] C. Kraaikamp und H. Nakada. On a problem of Schweiger concerning normal numbers. *J. Number Theory* **86**:330-340, 2001.

[70] C. Kraaikamp und H. Nakada. On normal numbers for continued fractions. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **20**:1405-1421, 2000.

[71] L. Kuipers und H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience Publ., 1974.

[72] J.C. Lagarias. On the normality of arithmetical constants. *Experiment. Math.* **10**:355-368, 2001.

[73] G. Larcher. *A real number which is normal to the Fibonacci sequence*, Manuskript

[74] M.B. Levin. On the discrepancy estimate of normal numbers. *Acta Arith.* **88**:99-111, 1999.

[75] M.B. Levin. On the upper bounds of discrepancy of completely uniform distributed and normal sequences. *Abstracts Amer. Mat. Soc.* **16**:556-557, 1995.

[76] M.B. Levin. The distribution of fractional parts of the exponential function. *Soviet Math. (Izv. VUZ)* **21**:41-47, 1977.

[77] M.B. Levin und M. Smorodinsky. A $\mathbb{Z}^d$ generalization of the Davenport-Erdös construction of normal numbers. *Colloq. Math.* **84/85**:431-441, 2000.

[78] J. Lesca und M. Mèndes France. Ensembles normaux. *Acta Arith.* **17**:273-282, 1970.

[79] C.T. Long. Note on normal numbers. *Pacific J. Math.* **7**:1163-1165, 1957.

[80] C.T. Long. On real numbers having normality of order k. *Pacific J. Math.* **18**:155-160, 1966.

[81] G. Martin. Absolutely abnormal numbers. *Amer. Math. Monthly* **108**:746-754, 2001.

[82] F.J. Martinelli. Construction of generalized normal numbers. *Pacific J. Math.* **76**:117-122, 1978.

[83] J.E. Maxfield. A short proof of Pillai's theorem on normal numbers. *Pacific J. Math.* **2**:23-24, 1952.

[84] J.E. Maxfield. Normal k-tuples. *Pacific J. Math.* **3**:189-196, 1953.

[85] J.E. Maxfield. Sums and products of normal numbers. *Amer. Math. Monthly* **59**:98, 1952

[86] M. Mendès France. A set of nonnormal numbers. *Pacific J. Math.* **15**:1165-1170, 1965.

[87] M. Mendès France. La Réunion des Ensembles Normaux. *J. Number Theory* **2**:345-351, 1970.

[88] M. Mendès France. Nombres transcendants et ensembles normaux. *Acta Arith.* **15**:189-192, 1969.9

[89] W. Moran und A.D. Pollington. Metrical results on normality to distinct bases. *J. Number Theory* **54**:180-189, 1995.

[90] W. Moran und A.D. Pollington. The discrimination theorem for normality to non-integer bases. *Israel J. Math.* **100**:339-347, 1997.

[91] K. Nagasaka. On Hausdorff-dimension of non-normal sets. *Ann. Inst. Math. Stat.* **23**:515-521, 1971.

[92] K. Nagasaka. Non-normal numbers to different bases and their Hausdorff dimension. *Tsukuba J. Math.* **10**:89-99, 1986.

[93] K. Nagasaka und C. Batut. Note sur les nombres normaux, *Nanta Math.* **13**:57-68, 1980.

[94] H. Nakada. Metrical theory for a class of continued fraction transformations and theior natural extensions. *Tokyo J. Math.* **4**:399-426, 1981.

[95] H. Nakada und R. Natsui. Some metric properties of α-continued fractions. *J. Number Theory* **97**:287-300, 2002.

[96] Y. Nakai und I. Shiokawa. A class of normal numbers. *Japan J. Math.* **16**:17-29, 1990.

[97] Y. Nakai und I. Shiokawa. A class of normal numbers II. *Number theory and cryptography, London Math. Soc. Lecture Note Ser. A* **154**, Cambridge Univ. Press:204-210, 1990.

[98] Y. Nakai und I. Shiokawa. Discrepancy estimates for a class of normal numbers. *Acta Arith.* **62**:271-284, 1992.

[99] Y. Nakai und I. Shiokawa. Normality of numbers generated by the values of polynomials at primes. *Acta Arith.* **81**:345-356, 1997.

[100] R. Nillsen. Normal numbers without measure theory. *Amer. Math. Monthly* **107**:639-644, 2000.

[101] I. Niven. *Irrational numbers.* Carus Math. Monographs, John Wiley and Sons Inc. 1956.

[102] I. Niven und H.S. Zuckerman. On the definition of normal numbers. *Pacific J. Math.* **1**:103-109, 1951.

[103] C.D. Olds. *Continued fractions.* Random House, 1963.

[104] L. Olsen. Distribution of digits in integers: fractal dimensions and zeta functions. *Acta Arith.* **105**:253-277, 2002.

[105] L. Olsen. Extremely non-normal continued fractions. *Acta Arith.* **108**:191-202, 2003.

[106] L. Olsen. Extremely non-normal numbers. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **137**:43-53, 2004.

[107] W. Parry. On the β-expansion of real numbers. *Acta Math. Hung.* **11**:401-416, 1960.

[108] C.E.M. Pearce und M.S. Keane. On normal numbers. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A* **32**:79-87, 1982.

[109] M.J. Pelling. Nonnormal numbers. *Amer. Math. Monthly***87**:141-142, 1980.

[110] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Teubner, 1957.

[111] S.S. Pillai. On normal numbers. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A.* **10**:13-15, 1939.

[112] S.S. Pillai. On normal numbers. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A.* **12**:179-184, 1940.

[113] S. Pincus und B.H. Singer. A recipe for randomness. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **95**:10367-10372, 1998.

[114] A.D. Pollington. The Hausdorff dimension of a set of non-normal well approximable numbers. *Number Theory (Carbondale 1979), Lecture Notes in Mathematics* **751**, Springer-Verlag:256-264, 1979.

[115] A.D. Pollington. The Hausdorff dimension of a set of normal numbers. *Pacific J. Math.* **95**:193-204, 1981.

[116] A.D. Pollington. The Hausdorff dimension of a set of normal numbers II. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A* **44**:259-264, 1988.

[117] A.G. Postnikov. Ergodic problems in the theory of congruences and of diophantine approximations. *Proc. Steklov Inst. Math* **82**, 1966.

[118] S. Ramanujan. Modular equations and approximations to π. *Quart. J. Math.* **45**:350-372, 1914.

[119] D. Rees. Note on a paper by I.J. Good. *J. London Math. Soc.* **21**:169-172, 1946.

[120] A. Rényi. Representation for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Hung.* **8**:477-493, 1957.

[121] T. Šalát. A remark on normal numbers. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **11**:53-56, 1966.

[122] T. Šalát. Über die Cantor'schen Reihen. *Czechoslovak Math. J.* **18**:25-56, 1968.

[123] J. Schiffer. Discrepancy of normal numbers. *Acta Arith.* **47**:175-186, 1986.

[124] W.M. Schmidt. Normalität bezüglich Matrizen. *J. reine angew. Math.* **214/215**:227-260, 1964.

[125] W.M. Schmidt. On badly approximable numbers and certain games. *Trans. Amer. Math. Soc.* **123**:178-199, 1966.

[126] W.M. Schmidt. On normal numbers. *Pacific J. Math.* **10**:661-672, 1960.

[127] W.M. Schmidt. Über die Normalität von Zahlen zu verschiedenen Basen. *Acta Arith.* **7**:299-309, 1961/1962.

[128] J. Schoißengeier. Über die Diskrepanz von Folgen (αb^n). *Sitzungsber. Öst. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Abt. II* **187**:225-235, 1978.

[129] F. Schweiger. Normalität bezüglich zahlentheoretischer Tranformationen. *J. Number Theory* **1**:390-397, 1969.

[130] F. Schweiger und T. Šalát. Some sets of sequences of positive integers and normal numbers. *Rev. Roumaine Math. Pures Apll.* **26**:1255-1264, 1981.

[131] D. Sherwell. Note on normal numbers and uniform distribution of sequences. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **43**:117-123, 2001.

[132] W. Sierpiński. Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'une tel nombre. *Bull. Soc. Math. France* **450**:125-132, 1917.

[133] W. Sierpiński. *Elementary theory of numbers.* North-Holland math. lib., 1988.

[134] M. Smorodinsky und B. Weiss. Normal sequences for Markov shifts and intrinsically ergodic subshifts. *Israel J. Math.* **59**:225-233, 1987.

[135] W. Steiner. *Digital expansions and the distributions of related functions.* Diplomarbeit, TU Wien, 2000.

[136] R.G. Stoneham. A general construction of transcendental non-Liouville normal numbers from rational fractions. *Acta Arith.* **16**:239-254, 1969.

[137] R.G. Stoneham. Normal recurring decimals, normal periodic systems, (j,ϵ)-normality, and normal numbers. *Acta Arith.* **28**:349-361, 1976.

[138] R.G. Stoneham. On absolute (j,ϵ)-normality in the rational fractions with applications to normal numbers. *Acta Arith.* **22**:277-286, 1973.

[139] R.G. Stoneham. On (j,ϵ)-normality in the rational fractions. *Acta Arith.* **16**:221-237, 1970.

[140] R.G. Stoneham. On the uniform ϵ-distribution of residues within the periods of rational fractions. *Acta Arith.* **22**:371-389, 1973.

[141] R.G. Stoneham. Some further results concerning (j,ϵ)-normality in the rationals. *Acta Arith.* **26**:83-96, 1974.

[142] R.G. Stoneham. The reciprocals of integral powers of primes and normal numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**:200-208, 1964.

[143] P. Szüsz und B. Volkmann. A combinatorial method for constructing normal numbers. *Forum Math.* **6**:399-414, 1994.

[144] E.C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function.* Oxford Univ. Press, 1986.

[145] I.M. Vinogradov. *The method of trigonometrical sums in number theory* (russisch). Nauka, 1971.

[146] B. Volkmann. Über Hausdorff'sche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I-VI, *Math. Z.* **58**:284-287, 1953; **59**:247-254,259-270,425-433, 1954/55; **65**:389-413, 1956; **68**:439-449, 1958

[147] B. Volkmann. On non-normal numbers. *Compositio Math.* **16**:186-190, 1964.

[148] B. Volkmann. On the Cassels-Schmidt theorem I. *Bull. Sci. Math.* **108**:321-336, 1984.

[149] B. Volkmann. On the Cassels-Schmidt theorem II. *Bull. Sci. Math.* **109**:209-223, 1985.

[150] B. Volkmann. Verallgemeinerung eines Satzes von Maxfield. *J. reine angew. Math.* **271**:203-213, 1974.

[151] G. Wagner. On rings of numbers which are normal to one base but non-normal to another. *J. Number Theory* **54**:211-231, 1995.

[152] S. Wagon. Is π normal? *Math. Intelligencer* **7**: 65-67, 1985; auch in [9, S. 557-559].

[153] D.D. Wall. *Normal numbers.* Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, 1949.

[154] H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.* **77**:313-352, 1916.

Liste verwendeter Symbole und Abkürzungen

$\#$	Anzahl der Elemente einer Menge
$\lvert x\rvert$	Betrag von x
$\lVert x\rVert$	Abstand zur nächsten ganzen Zahl, $\lVert x\rVert = \min_{k\in\mathbb{Z}} \lvert x-k\rvert$
$\lfloor x\rfloor$	Ganzer Teil von x, $\lfloor x\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}:\ k \leq x\}$
$\lceil x\rceil$	Kleinste ganze Zahl größer oder gleich x, $\lceil x\rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}:\ k \geq x\}$
$\{x\}$	Bruchteil von x, $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$
ggT	Größter gemeinsamer Teiler
kgV	Kleinstes gemeinsames Vielfaches
$\mathbb{N}\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}\ \mathbb{C}$	Natürliche, ganze, rationale, reelle, komplexe Zahlen
$\mathbb{N}^+$	Positive natürliche Zahlen
$o(n), \mathcal{O}(n)$	Landau-Symbole
$f \ll g$	Vinogradov-Notation ($f = \mathcal{O}(g)$)
$f \sim g$	f ist asymptotisch gleich g, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
$\deg p$	Grad eines Polynoms p