

Coupon Collector's Problem

Jürgen Rozner

08. Jänner 2008

Inhaltsverzeichnis

- 1 Sammeln ohne Tauschvorgang
 - Erwartungswert
 - Wahrscheinlichkeitsverteilung
- 2 Simulation des Tauschvorganges



Erwartungswert



Erwartungswert

Definition

T_i weitere Anzahl der Coupons die nötig sind, um einen i -ten Sticker in mein Album einzukleben, den ich noch nicht besitze



Erwartungswert

Definition

- T_i weitere Anzahl der Coupons die nötig sind, um einen i -ten Sticker in mein Album einzukleben, den ich noch nicht besitze
- R Anzahl der Coupons, die nötig sind, bis mein Album vollständig ist



Erwartungswert

Definition

- T_i weitere Anzahl der Coupons die nötig sind, um einen i -ten Sticker in mein Album einzukleben, den ich noch nicht besitze
- R Anzahl der Coupons, die nötig sind, bis mein Album vollständig ist

$$E(T_i) = \frac{n}{n - i + 1}$$



Erwartungswert

Definition

- T_i weitere Anzahl der Coupons die nötig sind, um einen i -ten Sticker in mein Album einzukleben, den ich noch nicht besitze
- R Anzahl der Coupons, die nötig sind, bis mein Album vollständig ist

$$E(T_i) = \frac{n}{n - i + 1}$$

$$E(R) = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$



Erwartungswert



Erwartungswert

Fußball WM 2006

- $n = 598$



Erwartungswert

Fußball WM 2006

- $n = 598$
- $E(R) = 598 \sum_{i=1}^{598} \frac{1}{i} = 4169,04 \approx 4170$ Sticker



Erwartungswert

Fußball WM 2006

- $n = 598$
- $E(R) = 598 \sum_{i=1}^{598} \frac{1}{i} = 4169,04 \approx 4170$ Sticker
- 1 Sticker kostet 10 Cent
⇒ Kosten betragen 417 Euro



Wahrscheinlichkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

A_n^w die ersten w Coupons füllen mein Album nicht aus



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

A_n^w die ersten w Coupons füllen mein Album nicht aus
 C_i^w der i -te Coupon war nicht in meinen w Stickern enthalten



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

A_n^w die ersten w Coupons füllen mein Album nicht aus
 C_i^w der i -te Coupon war nicht in meinen w Stickern enthalten

$$P\left(\bigcap_{i \in S_j} C_i^w\right) = \left(\frac{n-j}{n}\right)^w \text{ mit } |S_j| = j, S_j \subseteq \{1, \dots, n\}$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

A_n^w die ersten w Coupons füllen mein Album nicht aus
 C_i^w der i -te Coupon war nicht in meinen w Stickern enthalten

$$P\left(\bigcap_{i \in S_j} C_i^w\right) = \left(\frac{n-j}{n}\right)^w \text{ mit } |S_j| = j, S_j \subseteq \{1, \dots, n\}$$

$$P(A_n^w) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^w$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

W...Anzahl der Sticker, die benötigt werden, um alle n verschiedenen Coupons zu erhalten.



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

W...Anzahl der Sticker, die benötigt werden, um alle n verschiedenen Coupons zu erhalten.

$$P(W \leq w) = 1 - P(A_n^w)$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

W...Anzahl der Sticker, die benötigt werden, um alle n verschiedenen Coupons zu erhalten.

$$P(W \leq w) = 1 - P(A_n^w) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^w$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition

W ...Anzahl der Sticker, die benötigt werden, um alle n verschiedenen Coupons zu erhalten.

$$P(W \leq w) = 1 - P(A_n^w) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^w$$

Fußball WM 2006

$$P(W \leq E(R)) = P(W \leq 4169,04) = 0,571319$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(W = w) = P(W \leq w) - P(W \leq w - 1)$$



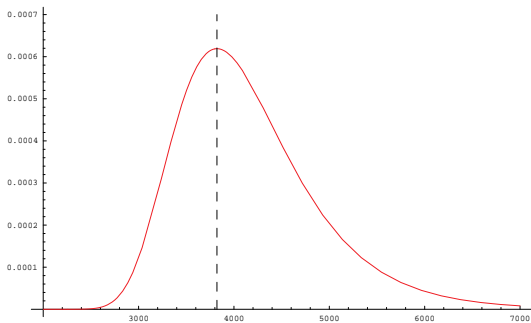
Wahrscheinlichkeitsverteilung

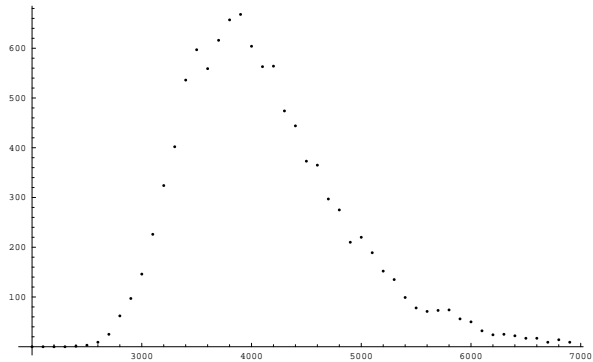
$$P(W = w) = P(W \leq w) - P(W \leq w - 1)$$

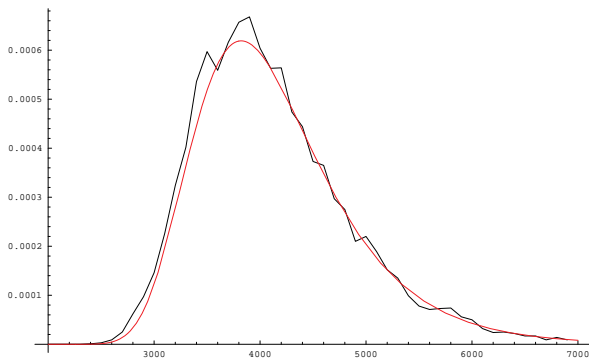
$$\Rightarrow P(W = w) = \frac{1}{n^{w-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i (n-i-1)^{w-1}$$



Funktion $f(x) = P(W = x)$







Inhaltsverzeichnis

- 1 Sammeln ohne Tauschvorgang
 - Erwartungswert
 - Wahrscheinlichkeitsverteilung

- 2 Simulation des Tauschvorganges



Simulation des Tauschvorganges



Simulation des Tauschvorganges

- Sammler A, Sammler B



Simulation des Tauschvorganges

- Sammler A, Sammler B
- Packungen zu je fünf gleichverteilten Coupons werden erworben



Simulation des Tauschvorganges

- Sammler A, Sammler B
- Packungen zu je fünf gleichverteilten Coupons werden erworben
- Voraussetzungen für Tauschvorgang:
 - Nur noch nicht verwendete Coupons können dem anderen zum Tausch angeboten werden.
 - Es wird nur dann getauscht, wenn beide einen Sticker zum Tauschen haben.



Simulation des Tauschvorganges

- Sammler A, Sammler B
- Packungen zu je fünf gleichverteilten Coupons werden erworben
- Voraussetzungen für Tauschvorgang:
 - Nur noch nicht verwendete Coupons können dem anderen zum Tausch angeboten werden.
 - Es wird nur dann getauscht, wenn beide einen Sticker zum Tauschen haben.
- Sammler A oder B besitzt ein volles Album \Rightarrow kein Tauschen mehr möglich



Simulation des Tauschvorganges



Simulation des Tauschvorganges

- Der Sammler, der als erster sein Album fertigstellte, musste im Durchschnitt $\sim 501,2$ Packungen kaufen.



Simulation des Tauschvorganges

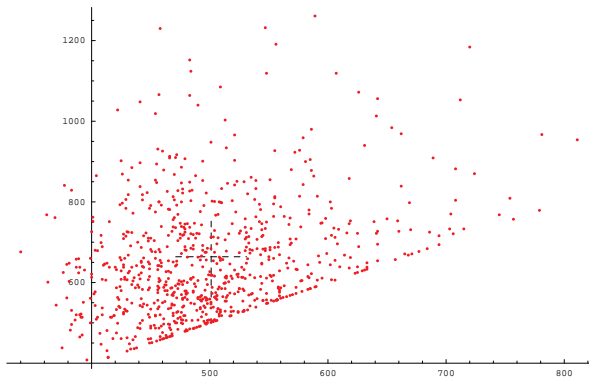
- Der Sammler, der als erster sein Album fertigstellte, musste im Durchschnitt $\sim 501,2$ Packungen kaufen.
- Der Sammler, der als zweiter alle 598 verschiedenen Coupons besaß, musste im Durchschnitt $\sim 663,9$ Packungen erwerben.



Simulation des Tauschvorganges

- Der Sammler, der als erster sein Album fertigstellte, musste im Durchschnitt $\sim 501,2$ Packungen kaufen.
- Der Sammler, der als zweiter alle 598 verschiedenen Coupons besaß, musste im Durchschnitt $\sim 663,9$ Packungen erwerben.
- Der Durchschnitt beider Sammler lag bei $\sim 582,6$ Packungen.





FRAGEN?

