Lagrange-Inversion

Sei $\Phi(z)$ analytisch in Umgebung von 0, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) \neq 0$.
Dann gibt es eine um 0 analytische Funktion $g(w)$ mit

$$g \circ \Phi = \mathrm{id} \qquad\qquad \Phi \circ g = \mathrm{id}$$

(in passenden Umgebungen von 0).
Weiters gilt

$$[w^n]\, g(w) = \frac{1}{n} \left[z^{n-1}\right] \frac{1}{(\Phi(z)/z)^n}.$$

Singularity Analysis — Standard Scale

Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ und

$$f(z) = (1 - z)^{-\alpha}.$$

Dann gilt

$$[z^n]\, f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{e_1}{n} + \frac{e_2}{n^2} + \cdots\right),$$

wobei

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \\ e_2 &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(3\alpha-1)}{24}, \\ e_3 &= \frac{\alpha^2(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha-3)}{48}. \end{aligned}$$

Singularity Analysis — Logarithmic Scale

Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ und

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha} \left(\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z} \right)^{\beta} .$$

Dann gilt

$$[z^n]\, f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^{\beta} \left(1 + \frac{C_1}{\log n} + \frac{C_2}{\log^2 n} + \cdots \right),$$

wobei

$$C_k = \binom{\beta}{k} \Gamma(\alpha)\, \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \bigg|_{s=\alpha} .$$

Sattelpunktmethode

$\int_A^B F(z)\,dz$; $F = e^f$. $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)} \cup \mathcal{C}^{(1)}$; $f'(\zeta) = 0$

SP1. Tails pruning

$$\int_{\mathcal{C}^{(1)}} F(z)\,dz = o\left(\int_{\mathcal{C}} F(z)\,dz\right).$$

SP2. Central approximation

$$f(z) = f(\zeta) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(z-\zeta)^2 + O(\eta_n)$$

mit $\eta_n \to 0$ gleichmäßig für $n \to \infty$ und $z \in \mathcal{C}^{(0)}$.

SP3. Tails completion

$$\int_{\mathcal{C}^{(0)}} e^{\frac{1}{2}f''(\zeta)(z-\zeta)^2}\,dz \sim \varepsilon i e^{-i\alpha/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|f''(\zeta)|x^2/2}\,dx$$
$$= \varepsilon i e^{-i\alpha/2} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\zeta)|}},$$

wobei $f''(\zeta) = e^{i\alpha}|f''(\zeta)|$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Resultat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A^B e^{f(z)}\,dz \sim \varepsilon e^{-i\alpha/2}\frac{e^{f(\zeta)}}{\sqrt{2\pi|f''(\zeta)|}} = \pm\frac{e^{f(\zeta)}}{\sqrt{2\pi f''(\zeta)}}.$$

Mellin-Transformation: Eigenschaften

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s) x^{-s}\, ds$$

$f(x)$	$f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	
Linearkombination	Linearkombination		
$x^k f(x)$	$f^*(s+k)$	$\langle \alpha - k, \beta - k \rangle$	
$f(x^\rho)$	$\frac{1}{\rho} f^*\left(\frac{s}{\rho}\right)$	$\langle \rho\alpha, \rho\beta \rangle$	
$f(\mu x)$	$\mu^{-s} f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\mu > 0$
$f(x) \log x$	$\frac{d}{ds} f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	
$x \frac{d}{dx} f(x)$	$-s f^*(s)$	$\langle \alpha', \beta' \rangle =$ Durchschn. FS $f(x)$, $x \frac{d}{dx} f(x)$	

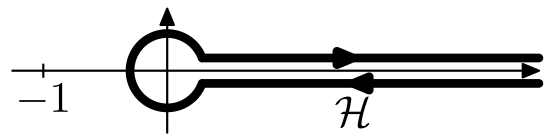
Mellin-Transformation: Beispiele und Hankel-Kontur

Beispiele

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(e^{-x})(s) &= \Gamma(s), \\
\mathcal{M}(e^{-x^2})(s) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \\
\mathcal{M}(\mathbb{1}_{[0,1]})(s) &= \frac{1}{s}, \\
\mathcal{M}(\log(1+x)) &= \frac{\pi}{s\sin(\pi s)}, \\
\mathcal{M}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) &= \zeta(s)\Gamma(s)
\end{aligned}$$

Hankel-Kontur

$$\mathcal{M}(f)(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\pi}{\sin \pi s}\int_{\mathcal{H}} f(z)(-z)^{s-1}\,dz$$



Korrespondenz $f(x)$ und $f^*(s)$

$f(x)$	$f^*(s)$
$f(x) = O(x^\alpha)$ für $x \to 0$	Linker Rand $-\alpha$ des FS
$f(x) = O(x^\beta)$ für $x \to \infty$	Rechter Rand $-\beta$ des FS
Entwicklung bis $O(x^\gamma)$ für $x \to 0$	Merom. Forts. bis $\operatorname{Re} s > -\gamma$
Entwicklung bis $O(x^\delta)$ für $x \to \infty$	Merom. Forts. bis $\operatorname{Re} s < -\delta$
Term $x^k \log^\ell x$ bei $x = 0$	Pol mit Sing. El. $\frac{(-1)^\ell \ell!}{(s+k)^{\ell+1}}$
Term $x^k \log^\ell x$ bei $x = \infty$	Pol mit Sing. El. $-\frac{(-1)^\ell \ell!}{(s+k)^{\ell+1}}$

Hurwitz Zeta Function

$$\zeta(s,\alpha) := \sum_{n>-\alpha} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

Abschätzung für $|t| \to \infty$ und $\sigma_0 \leq \operatorname{Re} s = \sigma \leq \sigma_1$:

$$|\zeta(s,\alpha)| = O(|t|^{\tau(\sigma)} \log|t|), \quad \tau(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & \sigma \leq 0, \\ 1/2 & 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \sigma & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \\ 0 & \sigma \geq 1, \end{cases}$$

wobei der Faktor $\log|t|$ nur in Umgebung von $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ erforderlich ist.

Euler-Maclaurinsche Summenformel

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(b)+f(a)}{2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot \Big(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \Big)$$
$$- \frac{1}{(2K+1)!} \int_a^b f^{(2K+1)}(x) B_{2K+1}(\{x\})\,dx$$

Hier sind $B_n(x)$ die Bernoulli-Polynome

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

mit $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ und $B_n(1) - [n = 1] = B_n(0) = B_n$.