

## Zusammenfassung der Eigenschaften der $\Gamma$ -Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0. \quad (1)$$

Durch die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{bzw.} \quad \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \quad (2)$$

gelingt die analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Zahlenebene (mit Ausnahme der Pole in  $s = -n, n \in \mathbb{N}_0$ ). Ebenso gelingt dies durch die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad (3)$$

$\Gamma(s)$  ist eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion mit einfachen Polen mit Residuum  $\frac{(-1)^n}{n!}$  in den Punkten  $s = -n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ .  $\Gamma(s)$  hat keine Nullstellen (dies folgt aus der Funktionalgleichung (3)). Die Mittag-Leffler-Zerlegung von  $\Gamma$  lautet

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+s)n!} + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \quad (4)$$


wobei das Integral eine ganze Funktion definiert. Für  $1/\Gamma$  kann die folgende Produktdarstellung angegeben werden

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \exp\left(-\frac{s}{n}\right). \quad (5)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma$  die Euler-Mascheronische Konstante

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N.$$

Ebenso gilt die Hankelsche Integraldarstellung

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} e^z \frac{dz}{z^s}, \quad \text{mit } \mathcal{H} \text{ wie im Bild.} \quad (6)$$


wobei das Integral über die Hankelsche Kontur  $\mathcal{H}$  zu erstrecken ist. Durch logarithmische Differenziation von (5) erhält man

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{s+n} - \frac{1}{n} \right). \quad (7)$$

Für das Verhalten der  $\Gamma$ -Funktion für  $|s| \rightarrow \infty$  gilt die Stirlingsche Formel

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \quad \text{für } |\operatorname{Arg} s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Für festes  $\sigma \in \mathbb{R}$  gilt für  $|t| \rightarrow \infty$

$$|\Gamma(\sigma + it)| \sim \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}. \quad (9)$$

Einige spezielle Werte:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma'(1) = -\gamma, \quad \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \log 2).$$

## Zusammenfassung der Eigenschaften der Riemannschen $\zeta$ -Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 1. \quad (10)$$

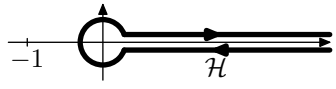
Für die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion gilt für  $\operatorname{Re} s > 1$  die Eulersche Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (11)$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken ist. Dies ist eine Konsequenz aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung der ganzen Zahlen. Aus der Integraldarstellung

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (12)$$

leitet man die Hankelsche Integraldarstellung her

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz. \quad (13)$$


Diese dient zur analytischen Fortsetzung der  $\zeta$ -Funktion in die gesamte komplexe Zahlenebene.  $\zeta(s)$  ist eine meromorphe Funktion mit einem einfachen Pol mit Residuum 1 in  $s = 1$ .

Es gilt die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s). \quad (14)$$

Die Entwicklung um  $s = 1$  hat die Gestalt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

$$\text{mit } \gamma_n = \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^K \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log K)^{n+1}}{n+1} \right). \quad (15)$$

Einige spezielle Werte:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi, \quad \zeta(-2n) = 0, \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}| \quad (16)$$

für  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $B_n$  die durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

definierten Bernoulli-Zahlen bezeichnet; insbesondere gilt:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \dots$$

Für  $\zeta(2n+1)$  ist keine geschlossene Formel bekannt. Man weiß nur:  $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ .

Die Punkte  $s = -2n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnet man als die trivialen Nullstellen. Alle anderen Nullstellen müssen im Streifen  $0 < \operatorname{Re} s < 1$  liegen. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass alle diese Nullstellen den Realteil  $\frac{1}{2}$  haben. Dies hätte viele Konsequenzen in der analytischen Zahlentheorie.