

1. Vom Parallelogramm $ABCD$ sind die Punkte $A = (2, 1)$, $B = (6, 2)$ und $D = (3, 5)$ gegeben. Berechnen Sie C .
2. Stellen Sie rechnerisch fest, ob das Viereck $ABCD$ mit $A = (2, 3)$, $B = (5, 6)$, $C = (8, 15)$, $D = (7, 18)$ ein Trapez ist und geben Sie gegebenenfalls an, welche Seiten zueinander parallel sind.
3. Liegen die Punkte $A = (2, 6)$, $B = (3, 8)$, $C = (4, 11)$ auf einer Geraden? Wenn nein, ändern Sie die zweite Koordinate von C so ab, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.
4. Gegeben sind die vier Punkte $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$, $C = (3, 9)$, $D = (4, 7)$. Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g , die Punkte C und D bestimmen eine Gerade h . Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und h , so dieser existiert.
5. Sei $A = (3, 5)$ und $B = (10, -9)$. Der Punkt C teile die Strecke AB im Verhältnis $3 : 4$. Bestimmen Sie C .
6. Liegt der Punkt $C = (3, 5, 7)$ auf der Geraden durch die Punkte $A = (2, 9, 11)$ und $B = (3, 4, 10)$?
7. (a) Definieren die Punkte $A = (1, 3, 4)$, $B = (2, 4, 5)$ und $C = (5, 8, 7)$ eine Ebene im \mathbb{R}^3 ? Geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Ebene (in Parameterform) an.
(b) Dasselbe für $A = (1, 3, 4)$, $B = (2, 4, 6)$, $C = (4, 6, 12)$.
8. Wie Aufgabe 4 für
 - (a) $A = (1, 3, 4)$, $B = (-1, 5, 8)$, $C = (2, 5, 5)$, $D = (0, 7, 9)$,
 - (b) $A = (1, 3, 4)$, $B = (-1, 5, 8)$, $C = (2, 5, 5)$, $D = (0, 7, 10)$,
 - (c) $A = (1, 3, 4)$, $B = (-1, 5, 8)$, $C = (2, 5, 5)$, $D = (1, 6, 7)$.

Deuten Sie die Situation jeweils geometrisch.

9. (a) Seien $A = (2, -2, 5)$, $B = (3, 0, 8)$, $C = (3, -4, 8)$, $R = (6, -2, 11)$ und $S = (4, -6, 17)$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden durch R und S mit der Ebene, in der die Punkte A , B und C liegen, sofern ein solcher existiert.
(b) Dasselbe für dieselben Punkte A , B , C , aber $R = (2, 2, 5)$ und $S = (1, 4, 2)$.
(c) Dasselbe für dieselben Punkte A , B , C , aber $R = (3, 4, 2)$ und $S = (2, 6, -1)$.

Deuten Sie die Situation jeweils geometrisch.

10. Seien $A = (0, 3, 3)$, $B = (1, 5, 4)$, $C = (1, 1, 4)$, $R = (-1, -2, 1)$, $S = (0, -10, 0)$, $T = (0, -4, 2)$. Bestimmen Sie den Durchschnitt der beiden Ebenen, die durch A , B und C einerseits und R , S und T andererseits aufgespannt werden.

11. Seien $A = (1, 2)$, $B = (13, -4)$ und $C = (7, 8)$. Bestimmen Sie sämtliche Schwerlinien des Dreiecks ABC (in Parameterform) und bestimmen Sie den Schwerpunkt. Überprüfen Sie, dass der Schwerpunkt tatsächlich auf allen drei Schwerlinien liegt.
12. Interpretieren Sie geometrisch (mit Begründung!):
- $\{\lambda(1, 2) + \mu(13, -4) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}$.
 - $\{\lambda(1, 2) + \mu(13, -4) + \nu(7, 8) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1\}$.
 - $\{\lambda(1, 2) + \mu(5, -4) + \nu(9, -10) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1\}$.

13. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$g = \{(1, 0, 1) + \alpha(1, 1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{F}_2\}$$

mit der Ebene

$$E = \{(1, 1, 1) + \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F}_2\}$$

im \mathbb{F}_2^3 .

14. Sei M eine Menge. Wir betrachten ihre Potenzmenge $V := \mathcal{P}(M)$. Auf V wird die symmetrische Differenz $\Delta : V \times V \rightarrow V$; $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ als innere Verknüpfung betrachtet. Zeigen Sie, dass (V, Δ) eine abelsche Gruppe ist. Definieren Sie eine Verknüpfung $\star : \mathbb{F}_2 \times V \rightarrow V$ so, dass V zu einem \mathbb{F}_2 -Vektorraum wird.

15. Zeigen Sie: \mathbb{R} ist ein \mathbb{Q} -Vektorraum.

16. Welche der folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) sind Untervektorräume des \mathbb{R}^n ?

- $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_n = 0\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$.

Stellen Sie für $n = 2$ die angegebenen Mengen graphisch dar.

17. Welche der folgenden Teilmengen des Raums der reellwertigen Folgen sind Untervektorräume?

- $W_1 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ reellwertige Folge} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 1\}$
- $W_2 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ reellwertige Folge} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\}$
- $W_3 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ reellwertige Folge} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n\}$

Begründen Sie Ihre Antwort.

18. Sei V ein K -Vektorraum.

- Seien U und W zwei Untervektorräume von V . Zeigen Sie, dass dann auch $U \cap W$ ein Untervektorraum von V ist.
- Zeigen Sie, dass dasselbe auch für den Durchschnitt beliebig vieler Untervektorräume gilt.

Anmerkung: „beliebig viele“ beinhaltet auch den Fall unendlich vieler Untervektorräume. Dazu sei I eine beliebige Menge („Indexmenge“) und für jedes $i \in I$ sei W_i ein K -Vektorraum. Zu zeigen ist, dass $\bigcap_{i \in I} W_i$, also die Menge $\{x \mid x \in W_i \text{ für alle } i \in I\}$ wieder ein K -Vektorraum ist. Obiger Fall von zwei Untervektorräumen entspricht also $I = \{1, 2\}$ mit $W_1 = U$ und $W_2 = W$.

- (c) Gelten analoge Aussagen auch für die Vereinigung von 2 Untervektorräumen (Beweis oder Gegenbeispiel)?
19. Geben Sie eine nichtleere Teilmenge U des \mathbb{R}^2 an, sodass U unter Addition und unter der Bildung von additiven Inversen abgeschlossen ist (also für $v, w \in U$ gelte $v + w \in U$ sowie $-v \in U$), aber so, dass U kein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 ist.
20. Geben Sie eine nichtleere Teilmenge U des \mathbb{R}^2 an, sodass U unter Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist (also für $v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\alpha v \in U$), aber so, dass U kein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 ist.

Bei den Aufgaben auf dieser und der nächsten Seite ist keine Polardarstellung komplexer Zahlen zu verwenden. Der Ansatz $z = x + iy$ für komplexe Zahlen erleichtert manche Aufgaben, andere hingegen werden dadurch umständlicher.

21. Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil jener komplexen Zahl z , die

$$\frac{(1 + 2i)z + 17}{(3 + 5i)z + (3 - 8i)} = 16 + 3i$$

erfüllt.

22. Man skizziere die folgenden Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 3i| < 7\}$
- (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z + \bar{z} < 0\}$
- (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z^2 \leq 4\}$

23. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie:

- (a) $AB = AC$, aber $B \neq C$
- (b) $AB \neq BA$ und
- (c) $AB = 0$, aber weder $A = 0$ noch $B = 0$.

24. Bestimmen Sie eine reelle Matrix $X \neq 0$ mit $X^2 = 0$.

25. Bestimmen Sie zwei reelle Matrizen $X \neq 0$ und $Y \neq 0$ mit $X^2 \neq 0$ und $X^2 + Y^2 = 0$.

26. Wir betrachten

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass M bezüglich Addition, Multiplikation mit Skalaren sowie Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist, d.h., selbst eine \mathbb{R} -Algebra ist.
- (b) Zeigen Sie, dass M sogar ein Körper ist.
- (c) Eigentlich kennen wir diesen Körper schon. Warum?

27. Die Matrizenmultiplikation wird üblicherweise in der Form durchgeführt, dass die i -te Zeile der ersten Matrix mit der j -ten Spalte der zweiten Matrix multipliziert wird. Die Multiplikation lässt sich aber auch in folgender Weise durchführen: Schreibe

$$A = (a_1 \quad \dots \quad a_m), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

d. h. die a_i sind die Spalten von $A \in K^{n \times m}$ und die b_j sind die Zeilen von $B \in K^{m \times r}$. Zeigen Sie, dass $AB = \sum_{i=1}^m a_i b_i$.

28. Seien $A_{11} \in K^{l_1 \times m_1}$, $A_{12} \in K^{l_1 \times m_2}$, $A_{21} \in K^{l_2 \times m_1}$, $A_{22} \in K^{l_2 \times m_2}$, $B_{11} \in K^{m_1 \times n_1}$, $B_{12} \in K^{m_1 \times n_2}$, $B_{21} \in K^{m_2 \times n_1}$, $B_{22} \in K^{m_2 \times n_2}$. Zeigen Sie: Wenn

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

29. Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0$.

30. (a) Es sei $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} c \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$z := \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + \operatorname{Re} c)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - \operatorname{Re} c)}$$

eine Quadratwurzel von c ist, d. h. $z^2 = c$. Wie sieht eine analoge Formel für $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} c < 0$ aus?

(b) Zeigen Sie: Jedes $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$, besitzt genau zwei Quadratwurzeln $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie weiters, dass für diese $z_2 = -z_1$ gilt.

31. Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 + (1 + 3i)z^3 - 2 + 2i = 0.$$

32. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen in der oberen Halbebene, d.h. $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $\operatorname{Im} w \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$|w - z| \leq |\bar{w} - z|$$

gilt. Veranschaulichen Sie sich die Aussage in der komplexen Zahlenebene.

33. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ genau dann den Betrag $|z| = 1$ hat, wenn die Identität

$$\left| \frac{\bar{u}z + v}{\bar{v}z + u} \right| = 1$$

für alle Zahlen $u, v \in \mathbb{C}$ mit $|u| \neq |v|$ gilt.

Vollständige Induktion kann bei manchen Beispielen nützlich sein.

34. Sei $A \in K^{m \times n}$ und sei $D \in K^{m \times m}$ eine Diagonalmatrix (eine Matrix $M = (m_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq m}}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $m_{jk} = 0$ für $j \neq k$). Zeigen Sie: Man erhält DA , indem man die i -te Zeile von A mit dem i -ten Hauptdiagonalelement von D multipliziert.
Geben Sie eine ähnliche Interpretation für die Multiplikation einer Matrix mit einer Diagonalmatrix von rechts an.
35. Seien $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{n \times n}$ symmetrisch (eine Matrix M heißt symmetrisch, wenn $M^t = M$). Zeigen Sie: AB ist genau dann symmetrisch, wenn A und B kommutieren (man sagt, dass zwei Matrizen M_1 und M_2 kommutieren, wenn $M_1 M_2 = M_2 M_1$).
36. Eine Matrix $A = (a_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \in K^{n \times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{jk} = 0$ für $j > k$ gilt. Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n \times n}$ werde mit $\mathcal{R}_n(K)$ bezeichnet.
Zeigen Sie durch direkte Rechnung oder mittels vollständiger Induktion, dass $\mathcal{R}_n(K)$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist.
37. Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen aus:
- $(x^5 + 1) : (x - 1)$
 - $(3x^4 + 2x^2 + x + 7) : (2x^2 + 4)$
38. Geben Sie für die in Aufgabe 16 angegebenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , welche Untervektorräume des \mathbb{R}^n sind, jeweils ein endliches Erzeugendensystem an.
39. Sei K ein Körper. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $K[X]$? (Beweis oder Gegenbeispiel)
- $W = \{aX^2 + bX^5 \mid a, b \in K\}$
 - $W = \{f \in K[X] \mid \deg f \leq d\}$ für ein festes $d \in \mathbb{N}_0$
 - $W = \{f \in K[X] \mid \deg f = 2\}$
 - $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(x) = f(x+1) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$
 - $W = \{f \in K[X] \mid f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in K\}$
 - $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(3) = 7\}$
 - $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(x) = f(x^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$

Geben Sie im Fall von Untervektorräumen jeweils ein (wenn möglich endliches) Erzeugendensystem an.

40. Seien $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ und

$$F := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ reellwertige Folge} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}.$$

- α und β sind Lösungen einer quadratischen Gleichung über \mathbb{Q} . Welcher?
 - Zeigen Sie, dass $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in F$ und $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in F$.
 - Zeigen Sie, dass die Menge $\{(A\alpha^n + B\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid A, B \in \mathbb{R}\}$ eine Teilmenge von F ist.
 - Finden Sie reelle Zahlen A und B derart, dass $A\alpha^n + B\beta^n = F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei F_n die Fibonacci-Zahlen $F_0 = 0, F_1 = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ sind.
 - Zeigen Sie, dass $\{(A\alpha^n + B\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid A, B \in \mathbb{R}\} = F$ gilt.
41. Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Elementen aus \mathbb{R}^2 ist durch

$$z_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie könnte man z_n noch beschreiben?

40. (f) Zeigen Sie, dass die Folgen $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von F bilden.
42. Sei $W = \{(1 + X + X^2)f \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$ ist, der die zusätzliche Eigenschaft

$$\forall p \in \mathbb{R}[X], f \in W : pf \in W$$

besitzt.

43. Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Für ein Polynom $p = \sum_{j=0}^d a_j X^j \in K[X]$ setzen wir

$$p(A) = \sum_{j=0}^d a_j A^j;$$

hier steht A^0 natürlich für die Einheitsmatrix.

- (a) Geben Sie $p(A)$ für $p = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an.

- (b) Zeigen Sie, dass für $f, g \in K[X]$ gilt, dass

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(A) = f(A)g(A).$$

44. Es seien $u = (-1, 7, 12)$, $v = (1, 2, 3)$ und $w = (2, 1, 1) \in \mathbb{Q}^3$. Stellen Sie fest, ob $u \in \text{span}(\{v, w\})$ gilt.
45. Es sei $V = \mathbb{Q}^4$ und

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}, \\ M_2 &:= \{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Zeige, dass V von M_1 erzeugt wird, dass M_2 linear unabhängig ist, und ergänze M_2 durch Hinzunahme von Elementen aus M_1 zu einer Basis von V .

46. (a) Kann die Menge $\{(17, -16, 15), (51, -48, 45)\}$ zu einer Basis des \mathbb{R}^3 ergänzt werden?
 (b) Sei K ein Körper. Geben Sie zwei disjunkte Basen von $K^{2 \times 3}$ an.

47. Seien $f_i \in \mathbb{R}[t]$ ($i = 1, 2, 3$) gegeben durch

$$f_1 := (t - 1)^2, \quad f_2 := (t + 2)^2, \quad f_3 := (t + 1)(t + 2).$$

Prüfen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\}$ als Teilmenge des \mathbb{R} -Vektorraumes $\mathbb{R}[t]$ linear unabhängig ist.

48. Sei $P_3 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 3\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: es gibt eine Basis $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ von P_3 , sodass keines der Polynome f_1, \dots, f_4 Grad 2 hat.

49. Sei K ein Körper und f, g und $h \in K[X]$ mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $f \cdot g = f \cdot h$ folgt, dass $g = h$.

50. Sei $W = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid 2w + x + y + z = 0 \text{ und } 3w + 2x + y + z = 0\}$. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von \mathbb{R}^4 ist und geben Sie eine Basis an.

51. Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$\{X - X^3, 1 + X^2 - 2X^3, -1 - 2X + X^3, -1 + X^2, 1 - X^2 - X^3, 2 - X^2\}$$

erzeugten Untervektorraums von $\mathbb{Q}[X]$.

52. Sei $d \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $P_d = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid \deg f \leq d\}$. Seien $f_0, \dots, f_d \in K[X]$ mit $\deg f_j = j$ für $j \in \{0, \dots, d\}$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, \dots, f_d\}$ eine Basis von P_d ist.

53. Es sei K ein Körper und $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines K -Vektorraumes V . Zeige: Für $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ (mit $a_i \in K$) ist die Menge

$$\{u_1 - u, u_2 - u, \dots, u_n - u\}$$

genau dann linear abhängig, wenn $a_1 + \dots + a_n = 1$ ist.

54. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Definiere

$$k(V) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt Untervektorräume } V_i \text{ von } V, i = 0, \dots, n, \\ \text{so dass } V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n\}.$$

Beweise: $k(V) = \dim V$.

55. Gegeben sind die Untervektorräume U und W des \mathbb{R}^4 durch

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0\},$$

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 0\}.$$

Man bestimme eine Basis von U , W , $U \cap W$ und $U + W$ sowie die Dimension von $U \cap W$ und $U + W$. Man untersuche, ob $U + W$ eine direkte Summe ist.

56. Sei $V := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$. Wir betrachten die Mengen $U := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x : f(-x) = -f(x)\}$ und $G := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x : f(-x) = f(x)\}$.

(a) Zeigen Sie, dass U und G Untervektorräume von V sind.

(b) Zeigen Sie, dass $V = U \oplus G$.

57. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2 \times 2}$$

und $W = \text{span}\{A^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie, dass

(a) (I, A) eine Basis von W ist,

(b) W bezüglich der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.

(c) Geben Sie alle Elemente von W explizit an und stellen Sie die Multiplikationstafel auf.

(d) Ist W ein Körper?

58. Geben Sie drei Untervektorräume A, B, C des \mathbb{R}^2 an, sodass $A \cap B = \{0\}$, $B \cap C = \{0\}$ und $A \cap C = \{0\}$, aber $A + B + C$ keine direkte Summe ist.

59. Sind die folgenden Abbildungen linear? Beweisen oder widerlegen Sie.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2$

(c) $f_3 : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$

(d) $f_4 : \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g \mapsto g(1)$

(e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |x_1| \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $f_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

60. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

und $F_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto A \cdot x$. Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Im } F_A$ und eine Basis von $\text{Ker } F_A$.

61. Sei $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{Ker } F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 5x_2 \text{ und } x_3 = -7x_4\}$. Zeigen Sie, dass F surjektiv ist.

62. Geben Sie sämtliche lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

(a) $\text{Ker } F = \{(u, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 \mid w + x - y - 2z = 0 \wedge x - y - 3z = 0 \wedge y - 5z = 0\}$

(b) $\text{Ker } F = \text{span}\{(1, 1, 1, 1, 0)^t, (0, 1, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1, 0)^t\}$

an.

63. Sind die folgenden Abbildungen lineare Abbildungen über dem Skalarkörper \mathbb{F}_2 ?

(a) $F : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2; (x, y) \mapsto x^2 + y^2$

(b) $G : \mathbb{F}_2[X] \rightarrow \mathbb{F}_2[X]; f \mapsto f^2$

64. Seien V ein K -Vektorraum, U und W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Geben Sie einen Epimorphismus $P : V \rightarrow U$ an, sodass $P(u) = u$ für alle $u \in U$ und $P(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt. Zeigen Sie, dass es nur einen solchen Epimorphismus gibt. Was ist P^2 ?

65. (a) Seien V, W zwei K -Vektorräume mit $\dim V < \infty$ und $F : V \rightarrow W$ linear. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum U von V gibt, sodass $V = U \oplus \text{Ker } F$ und $\text{Im } F = F(U)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie ein solches U für die Abbildung aus Aufgabe 60.

66. Sei $V = \mathbb{R}[T]$ und $W = \{f \in \mathbb{R}[T] \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}$.

(a) Geben Sie einen Isomorphismus von V nach W an.

(b) Zeigen Sie, dass W ein echter Untervektorraum von V (also $W \leq V$ mit $W \neq V$) ist, obwohl $\dim W = \dim V$.

67. Seien

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 1)^t, & w_1 &= (-1, 9)^t, \\ v_2 &= (-1, 1, 0)^t, & w_2 &= (3, 0)^t, \\ v_3 &= (1, 0, 0)^t, & w_3 &= (9, 0)^t. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(v_j) = w_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ sowie deren Matrixdarstellungen bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 bzw. des \mathbb{R}^2 .

68. Für eine natürliche Zahl n sei $P_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq n\}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $D : P_2 \rightarrow P_1$ mit $D(\sum_j a_j X^j) = \sum_j j a_j X^{j-1}$. Als Basis von P_2 wählen wir $1, X, (3X^2 - 1)/2$ (das sind die ersten drei Legendre-Polynome) und als Basis von P_1 die Laguerre-Polynome 1 und $-X + 1$.

- Geben Sie die Matrixdarstellung von D bezüglich dieser Basen an.
- Geben Sie den Koordinatenvektor des Polynoms $f = 6 + 7X - 9X^2$ bezüglich der gegebenen Basis des P_2 (Legendre-Polynome) an.
- Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Koordinatenvektors und der darstellenden Matrix $D(f)$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch direkte Anwendung von D .

69. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq r \neq s \leq n$, K ein Körper und $\alpha \in K$. Wir betrachten die Matrizen $L_{rs}(\alpha) = (\ell_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$, $M_r(\alpha) = (m_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ und $V_{rs} = (v_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ mit

$$\ell_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k, \\ \alpha, & \text{wenn } (j, k) = (r, s), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad m_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k \neq r, \\ \alpha, & \text{wenn } j = k = r, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$v_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k \notin \{r, s\}, \\ 1, & \text{wenn } (j, k) \in \{(r, s), (s, r)\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Geben Sie für $n = 4$ die Matrizen $L_{3,2}(9)$, $M_3(12)$ und V_{24} an.
- Stellen Sie für allgemeines n die Matrizen $L_{rs}(\alpha)$, $M_r(\alpha)$ und V_{rs} als Blockmatrizen dar, wobei nur Einheitsmatrizen, Nullmatrizen und vereinzelt (1×1) -Blöcke auftreten sollen.
- Zeigen Sie, dass $L_{rs}(\alpha)$, $M_r(\alpha)$ (außer für $\alpha = 0$) sowie V_{rs} invertierbar sind und geben Sie jeweils die inversen Matrizen (möglichst wieder in Gestalt von $L_{r's'}(\alpha')$, $M_{r'}(\alpha')$, $V_{r's'}$ für ggf. neue Werte der Parameter r', s', α') an.
- Erklären Sie, wie sich die Zeilen einer Matrix A verändern, wenn sie mit einer der drei gegebenen Matrizen von links multipliziert werden.

70. Sei K ein Körper,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$$

mit $ad - bc \neq 0$. Finden Sie alle x und $y \in K^2$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$A \cdot (x \ y)$$

und kommentieren Sie das Ergebnis. Was geschieht, wenn $ad - bc = 0$?

71. Geben Sie zwei invertierbare Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, sodass $A + B \neq 0$, aber $A + B$ nicht invertierbar ist.
72. Seien U, V, W drei K -Vektorräume mit $\dim U < \infty$ und $\dim V < \infty$ und $F : U \rightarrow V$ sowie $G : V \rightarrow W$ linear. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\text{Ker } G \circ F) \leq \dim \text{Ker } G + \dim \text{Ker } F.$$

73. Seien V und W zwei endlich-dimensionale K -Vektorräume. Zeigen Sie:
- (a) Es gibt genau dann einen Epimorphismus von V nach W , wenn $\dim W \leq \dim V$.
 - (b) Für ein $U \leq V$ gibt es genau dann einen Homomorphismus $F : V \rightarrow W$ mit $\text{Ker } F = U$, wenn $\dim U \geq \dim V - \dim W$.
74. Sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} und $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Angenommen, für ein $v \in V$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $F^n(v) \neq 0$, aber $F^{n+1}(v) = 0$ (mit F^k ist $\underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_k$ gemeint und wie immer ist $F^0 = \text{id}$). Beweisen Sie, dass dann $\{v, F(v), F^2(v), \dots, F^n(v)\}$ linear unabhängig ist.

75. (a) Seien U, V, W endlich-dimensionale K -Vektorräume und $F : U \rightarrow V$ und $G : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $\text{rank } G \circ F \in \{0, 1, \dots, \min\{\text{rank } G, \text{rank } F\}\}$.
- (b) Gibt es lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\text{rank } F = 2, \quad \text{rank } G = 2, \quad \text{rank } G \circ F = 0?$$

- (c) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$. Geben Sie endlich-dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume U, V, W sowie lineare Abbildungen $F : U \rightarrow V$ und $G : V \rightarrow W$ an, sodass

$$\text{rank } F = m, \quad \text{rank } G = n, \quad \text{rank } G \circ F = r.$$

76. Seien V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und F, G zwei Endomorphismen von V . Zeigen Sie, dass $F \circ G$ genau dann ein Automorphismus ist, wenn sowohl F als auch G Automorphismen sind.
77. Sei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und F ein Endomorphismus von V . Zeigen Sie, dass F genau dann ein skalares Vielfaches der Identität ist, wenn $F \circ G = G \circ F$ für alle Endomorphismen G von V gilt.

78. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ an, sodass $AB = I$. Zeigen Sie, dass es keine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ gibt, sodass $CA = I$.

79. Seien V und W Vektorräume über \mathbb{Q} . Sei weiters $f : V \rightarrow W$ eine Abbildung, die der Bedingung

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in V$$

genügt.

- (a) Zeigen Sie, dass $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{N}$.
- (b) Zeigen Sie, dass $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{Z}$.
- (c) Zeigen Sie, dass $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{Q}$, dass also f bereits linear ist.
- (d) Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist. Die Abbildung $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sei durch $f(a + b\sqrt{2}) = a$ definiert. Gilt

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Ist f linear (über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$)?

80. Geben Sie eine nicht lineare Funktion $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ an, sodass $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $v \in \mathbb{Q}^2$ gilt.
81. Sei $A = (1, 5), B = (10, 3), C = (5, 10)$. Drehen Sie das Dreieck ABC um 30° in mathematisch negative Richtung
- (a) um den Ursprung
- (b) um den Punkt $(0, 5)$

und geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte des gedrehten Dreiecks an.

82. Lösen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme $Ax = 0$ durch Gauß-Elimination, wobei

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

War Gauß-Elimination in allen Fällen effizient?

83. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$ durch Gauß-Elimination, wobei

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

84. Eine beliebige **Faustregel** für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ besagt:

Ist die Anzahl m der Gleichungen größer (gleich) [kleiner] als die Anzahl n der Unbekannten, dann gibt es keine (genau eine) [mehrere] Lösung[en]. Ferner ist die Anzahl der freien Parameter in der allgemeinen Lösung gleich $m - n$, falls $m \geq n$. Diese Regel trifft zwar in den „meisten“ Fällen zu, aber doch nicht immer, wie die Beispiele (a) bis (c) zeigen.

- (a) Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und zwei Unbekannten an, das genau eine Lösung besitzt.
- (a') Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und zwei Unbekannten an, das mehrere Lösungen besitzt.
- (b) Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und drei Unbekannten an, das unlösbar ist.
- (b') Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und drei Unbekannten an, das mehrere Lösungen besitzt.
- (c) Geben Sie ein System mit $m = 1$ und $n = 2010$ an, das unlösbar ist.
- (d) Wann ist ein System mit m linearen Gleichungen und n Unbekannten lösbar? Wie berechnet man die Anzahl der freien Parameter?
- (e) Wann hat ein System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten genau eine Lösung?

85. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$, wobei

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 29 \\ -57 \end{pmatrix}.$$

86. Wir betrachten die Untervektorräume U und W des \mathbb{Q}^4 mit

$$U = \text{span}\{(1, -1, 2, 1)^t, (2, 1, -1, 2)^t, (0, -3, 5, 0)^t\},$$

$$W = \text{span}\{(3, 1, 1, 4)^t, (-1, 3, -3, 0)^t, (5, 0, 3, 6)^t\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$. Handelt es sich um eine direkte Summe?

87. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x & + & ky & - & (k+1)z & = & k-7 \\ (1-k)x & - & ky & + & (2k-1)z & = & 3k-1 \\ kx & + & 4y & - & 6z & = & -10 \end{array}$$

(i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen bzw. (iii) keine Lösung? Für die Fälle (i) und (ii) sind die Lösungen in Abhängigkeit von k anzugeben.

88. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) Bestimmen Sie A^{-1} für $\alpha = 2$.

(b) Bestimmen Sie A^{-1} in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

89. Der Endomorphismus $F : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ habe bezüglich der Basis $(2, 1, 1)^t, (1, 2, 0)^t, (0, -8, 3)^t$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung dieses Endomorphismus bezüglich der Standardbasis des \mathbb{Q}^3 .

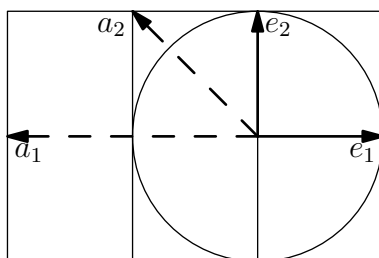
90. Für ein $c \in \mathbb{R}$ sei M_c die Menge der reellen (3×3) -Matrizen, die magische Quadrate mit Summe c sind, d.h., deren Zeilen, deren Spalten und deren beide Diagonalen Summe c haben. Weiters setzen wir $M = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} M_c$. Zeigen Sie, dass M ein \mathbb{R} -Vektorraum ist und geben Sie eine Basis an.
91. (a) Sei $R \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, auf deren Hauptdiagonale alle Elemente von 0 verschieden sind. Zeigen Sie, dass R regulär ist und dass R^{-1} wieder eine obere Dreiecksmatrix mit von 0 verschiedenen Hauptdiagonalelementen ist.
- (b) Sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, auf deren Hauptdiagonale lauter positive Einträge stehen. Zeigen Sie, dass dies dann auch für die Inverse R^{-1} gilt.
- (c) Sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, auf deren Hauptdiagonale lauter Einsen stehen. Zeigen Sie, dass dies dann auch für die Inverse R^{-1} gilt.

92. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 7 & 6 \\ 15 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die LR -Zerlegung der Matrix A , sofern diese existiert.
- (b) Bestimmen Sie die Inverse von A .
- (c) Bestimmen Sie die LR -Zerlegung der Matrix B , sofern diese existiert.
- (d) Bestimmen Sie die Inverse von B .
93. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und W ein affiner Unterraum von V . Zeigen Sie, dass es dann eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow V$ und ein $c \in V$ gibt, sodass $W = F^{-1}(c)$. Geben Sie solche F und c explizit für den Fall von $W = (1, 2, 3, 4)^t + \text{span}\{(1, 1, 1, 1)^t, (1, 2, 0, 1)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$ an.

94. In der Skizze sind der Einheitskreis und die Basen (e_1, e_2) und (a_1, a_2) dargestellt.



Es sei $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die 30° -Drehung (im math. pos. Sinn) um den Ursprung.

- (a) Geben Sie die Matrixdarstellungen von δ bezüglich der beiden Basen an.
 (b) Zeichnen und berechnen Sie $\delta(a_1)$.

95. Geben Sie alle Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ an, sodass das von

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Parallelepipäde (nicht-orientiertes) Volumen 1 besitzt.

96. Bestimmen Sie $\det A$ für

$$(a) A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

97. Bestimmen Sie $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -5 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -5 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

98. Für eine Permutation $\pi \in S_n$ definiert man die zugehörige Permutationsmatrix P_π als

$$P_\pi = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}),$$

wobei die e_1, \dots, e_n wie üblich die Standardbasis des K^n sind.

- (a) Zeigen Sie, dass für $\sigma, \pi \in S_n$ die zugehörigen Permutationsmatrizen die Gleichung $P_\sigma P_\pi = P_{\sigma \circ \pi}$ erfüllen.
 (b) Zeigen Sie, dass $\det P_\pi = \text{sign } \pi$ gilt.

(c) Sei $A \in K^{n \times n}$. Beschreiben Sie, was die Multiplikation einer Matrix A mit einer Permutationsmatrix P_π von links bzw. von rechts bewirkt.

99. Geben Sie eine Permutationsmatrix P , eine untere Dreiecksmatrix L (deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind) und eine obere Dreiecksmatrix R an, sodass $B = PLR$, wobei B die Matrix aus Aufgabe 92 ist.

100. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\text{sign } \sigma = 1$ gleich der Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\text{sign } \sigma = -1$ ist.

101. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & d_1 \\ \vdots & \ddots & d_2 & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_n & ? & \dots & ? \end{pmatrix},$$

wobei die ? jeweils für beliebige Einträge stehen können.

102. In $\mathbb{R}[t]$ ist die Familie

$$(1 - t + at^2, 1 + t + bt^2, 1 + t^2)$$

gegeben. Man untersuche, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die Familie linear unabhängig ist.

103. Die Spur $\text{tr}(A)$ einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist durch $\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ definiert. Zeigen Sie für $A, B \in K^{n \times n}$:

(a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = \text{tr}(B + A)$,

(b) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$,

(c) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$,

(d) Falls B regulär ist: $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(A)$.

Wie könnte man die Spur eines Endomorphismus definieren?

104. Wahr oder falsch (Beweis oder Gegenbeispiel)? Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$,

(b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$,

(c) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$,

(d) $\det(A^n) = (\det(A))^n$.

105. Seien K ein Körper und $x_1, \dots, x_n \in K$. Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

106. Berechnen Sie mittels 3 verschiedener Methoden $\det A$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

107. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + (2a - 8)y + (3 + 3a)z &= 3 + 6a \\ 2x + (-11 + 3a)y + (7 + 4a)z &= 9 + 8a \\ 4x + (-12 + 4a)y + (12 + 6a)z &= 16 + 12a \end{aligned}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt dieses Gleichungssystem (i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen, (iii) keine Lösung? Berechnen Sie im Fall (ii) alle Lösungen in Abhängigkeit von a . Verwenden Sie, wo sinnvoll, Determinanten!

108. Lösen Sie Aufgabe 87 für den Fall regulärer Systemmatrix unter Verwendung der Cramerschen Regel.

109. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ und D eine Drehmatrix. Zeigen Sie, dass dann $\det(a_1, a_2) = \det(Da_1, Da_2)$ gilt. Charakterisieren Sie geometrisch, wann $\det(a_1, a_2) > 0$ gilt.

110. Seien $f = \sum_{j=0}^m a_j X^j$, $g = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in K[X]$ mit $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$. Man definiert die Sylvestermatrix von f und g als die $(m+n) \times (m+n)$ -Matrix

$$S(f, g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \ddots & a_{m-1} & a_m & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \ddots & b_{n-1} & b_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizienten von f über n und die Koeffizienten von g über m Zeilen wiederholt werden. Die Determinante der Sylvestermatrix heißt die *Resultante* $\text{Res}(f, g)$ von f und g .

(a) Sei $f = aX^2 + bX + c$ und $f' = 2aX + b$. Bestimmen Sie $\text{Res}(f, f')$.

(b) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bzw. β_1, \dots, β_n die Nullstellen von f bzw. g . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es sich dabei um $m+n$ paarweise verschiedene Elemente von K handelt.

Zeigen Sie durch Multiplikation der Sylvester-Matrix mit einer $(m+n) \times (m+n)$ -Matrix wie in Aufgabe 105 (in ihr sollen alle Nullstellen auftreten), dass

$$\text{Res}(f, g) = a_m^n b_n^m \prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^m (\beta_k - \alpha_j) = b_n^m \prod_{k=1}^n f(\beta_k) = (-1)^{mn} a_m^n \prod_{j=1}^m g(\alpha_j).$$