11. Seien $A = (1, 2)$, $B = (13, -4)$ und $C = (7, 8)$. Bestimmen Sie sämtliche Schwerlinien des Dreiecks ABC (in Parameterform) und bestimmen Sie den Schwerpunkt. Überprüfen Sie, dass der Schwerpunkt tatsächlich auf allen drei Schwerlinien liegt.

12. Interpretieren Sie geometrisch (mit Begründung!):

    (a) $\{\lambda(1, 2) + \mu(13, -4) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}$.

    (b) $\{\lambda(1, 2) + \mu(13, -4) + \nu(7, 8) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1\}$.

    (c) $\{\lambda(1, 2) + \mu(5, -4) + \nu(9, -10) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1\}$.

13. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden

    $$g = \{(1, 0, 1) + \alpha(1, 1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{F}_2\}$$

    mit der Ebene

    $$E = \{(1, 1, 1) + \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F}_2\}$$

    im $\mathbb{F}_2^3$.

14. Sei M eine Menge. Wir betrachten ihre Potenzmenge $V := \mathcal{P}(M)$. Auf V wird die symmetrische Differenz $\Delta : V \times V \to V$; $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ als innere Verknüpfung betrachtet. Zeigen Sie, dass (V, Δ) eine abelsche Gruppe ist. Definieren Sie eine Verknüpfung $\star : \mathbb{F}_2 \times V \to V$ so, dass V zu einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum wird.

15. Zeigen Sie: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

16. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$?

    (a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$,

    (b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_n = 0\}$,

    (c) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$,

    (d) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$,

    (e) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$,

    (f) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$.

    Stellen Sie für $n = 2$ die angegebenen Mengen graphisch dar.

17. Welche der folgenden Teilmengen des Raums der rellwertigen Folgen sind Untervektorräume?

    (a) $W_1 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Folge $\mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 1\}$

    (b) $W_2 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Folge $\mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\}$

    (c) $W_3 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Folge $\mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = 2x_{n+1}^2 - x_n\}$

    Begründen Sie Ihre Antwort.

18. Sei V ein K-Vektorraum.

    (a) Seien U und W zwei Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass dann auch $U \cap W$ ein Untervektorraum von V ist.

    (b) Zeigen Sie, dass dasselbe auch für den Durchschnitt beliebig vieler Untervektorräume gilt.

    Anmerkung: „beliebig viele“ beinhaltet auch den Fall unendlich vieler Untervektorräume. Dazu sei I eine beliebige Menge („Indexmenge“) und für jedes $i \in I$ sei W_i ein K-Vektorraum. Zu zeigen ist, dass $\bigcap_{i\in I} W_i$, also die Menge $\{x \mid x \in W_i$ für alle $i \in I\}$ wieder ein K-Vektorraum ist. Obiger Fall von zwei Untervektorräumen entspricht also $I = \{1, 2\}$ mit $W_1 = U$ und $W_2 = W$.