Bei den Aufgaben auf dieser und der nächsten Seite ist keine Polardarstellung komplexer Zahlen zu verwenden. Der Ansatz $z = x + iy$ für komplexe Zahlen erleichtert manche Aufgaben, andere hingegen werden dadurch umständlicher.

21. Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil jener komplexen Zahl $z$, die
$$\frac{(1+2i)z+17}{(3+5i)z+(3-8i)} = 16+3i$$
erfüllt.

22. Man skizziere die folgenden Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene:
    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-3i| < 7\}$
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z + \bar{z} < 0\}$
    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\ z^2 \leq 4\}$

23. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Verifizieren Sie:
    (a) $AB = AC$, aber $B \neq C$
    (b) $AB \neq BA$ und
    (c) $AB = 0$, aber weder $A = 0$ noch $B = 0$.

24. Bestimmen Sie eine reelle Matrix $X \neq 0$ mit $X^2 = 0$.

25. Bestimmen Sie zwei reelle Matrizen $X \neq 0$ und $Y \neq 0$ mit $X^2 \neq 0$ und $X^2 + Y^2 = 0$.

26. Wir betrachten
$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
    (a) Zeigen Sie, dass $M$ bezüglich Addition, Multiplikation mit Skalaren sowie Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist, d.h., selbst eine $\mathbb{R}$-Algebra ist.
    (b) Zeigen Sie, dass $M$ sogar ein Körper ist.
    (c) Eigentlich kennen wir diesen Körper schon. Warum?

27. Die Matrizenmultiplikation wird üblicherweise in der Form durchgeführt, dass die $i$-te Zeile der ersten Matrix mit der $j$-ten Spalte der zweiten Matrix multipliziert wird. Die Multiplikation lässt sich aber auch in folgender Weise durchführen: Schreibe
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$
d. h. die $a_i$ sind die Spalten von $A \in K^{n\times m}$ und die $b_j$ sind die Zeilen von $B \in K^{m\times r}$. Zeigen Sie, dass $AB = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$.

28. Seien $A_{11} \in K^{l_1\times m_1}$, $A_{12} \in K^{l_1\times m_2}$, $A_{21} \in K^{l_2\times m_1}$, $A_{22} \in K^{l_2\times m_2}$, $B_{11} \in K^{m_1\times n_1}$, $B_{12} \in K^{m_1\times n_2}$, $B_{21} \in K^{m_2\times n_1}$, $B_{22} \in K^{m_2\times n_2}$. Zeigen Sie: Wenn
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$
dann gilt
$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$