29. Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.

30. (a) Es sei $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} c \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$z := \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + \operatorname{Re} c)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - \operatorname{Re} c)}$$

eine Quadratwurzel von c ist, d. h. $z^2 = c$. Wie sieht eine analoge Formel für $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} c < 0$ aus?

(b) Zeigen Sie: Jedes $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$, besitzt genau zwei Quadratwurzeln z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie weiters, dass für diese $z_2 = -z_1$ gilt.

31. Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 + (1+3i)z^3 - 2 + 2i = 0.$$

32. Seien z, $w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen in der oberen Halbebene, d.h. $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $\operatorname{Im} w \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$|w - z| \leq |\overline{w} - z|$$

gilt. Veranschaulichen Sie sich die Aussage in der komplexen Zahlenebene.

33. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ genau dann den Betrag $|z| = 1$ hat, wenn die Identität

$$\left| \frac{\overline{u}z + v}{\overline{v}z + u} \right| = 1$$

für alle Zahlen u, $v \in \mathbb{C}$ mit $|u| \neq |v|$ gilt.