

Vollständige Induktion kann bei manchen Beispielen nützlich sein.

34. Sei $A \in K^{m \times n}$ und sei $D \in K^{m \times m}$ eine Diagonalmatrix (eine Matrix $M = (m_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq m}}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $m_{jk} = 0$ für $j \neq k$). Zeigen Sie: Man erhält DA , indem man die i -te Zeile von A mit dem i -ten Hauptdiagonalelement von D multipliziert.
Geben Sie eine ähnliche Interpretation für die Multiplikation einer Matrix mit einer Diagonalmatrix von rechts an.

35. Seien $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{n \times n}$ symmetrisch (eine Matrix M heißt symmetrisch, wenn $M^t = M$). Zeigen Sie: AB ist genau dann symmetrisch, wenn A und B kommutieren (man sagt, dass zwei Matrizen M_1 und M_2 kommutieren, wenn $M_1 M_2 = M_2 M_1$).

36. Eine Matrix $A = (a_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \in K^{n \times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{jk} = 0$ für $j > k$ gilt. Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n \times n}$ werde mit $\mathcal{R}_n(K)$ bezeichnet.
Zeigen Sie durch direkte Rechnung oder mittels vollständiger Induktion, dass $\mathcal{R}_n(K)$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist.

37. Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen aus:

- (a) $(x^5 + 1) : (x - 1)$
(b) $(3x^4 + 2x^2 + x + 7) : (2x^2 + 4)$

38. Geben Sie für die in Aufgabe 16 angegebenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , welche Untervektorräume des \mathbb{R}^n sind, jeweils ein endliches Erzeugendensystem an.

39. Sei K ein Körper. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $K[X]$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

- (a) $W = \{aX^2 + bX^5 \mid a, b \in K\}$
(b) $W = \{f \in K[X] \mid \deg f \leq d\}$ für ein festes $d \in \mathbb{N}_0$
(c) $W = \{f \in K[X] \mid \deg f = 2\}$
(d) $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(x) = f(x+1) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$
(e) $W = \{f \in K[X] \mid f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in K\}$
(f) $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(3) = 7\}$
(g) $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(x) = f(x^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$

Geben Sie im Fall von Untervektorräumen jeweils ein (wenn möglich endliches) Erzeugendensystem an.

40. Seien $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ und

$$F := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ reellwertige Folge} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}.$$

- (a) α und β sind Lösungen einer quadratischen Gleichung über \mathbb{Q} . Welcher?
(b) Zeigen Sie, dass $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in F$ und $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in F$.
(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(A\alpha^n + B\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid A, B \in \mathbb{R}\}$ eine Teilmenge von F ist.
(d) Finden Sie reelle Zahlen A und B derart, dass $A\alpha^n + B\beta^n = F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei F_n die Fibonacci-Zahlen $F_0 = 0, F_1 = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ sind.
(e) Zeigen Sie, dass $\{(A\alpha^n + B\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid A, B \in \mathbb{R}\} = F$ gilt.

41. Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Elementen aus \mathbb{R}^2 ist durch

$$z_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie könnte man z_n noch beschreiben?