

40. (f) Zeigen Sie, dass die Folgen $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von F bilden.
42. Sei $W = \{(1 + X + X^2)f \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$ ist, der die zusätzliche Eigenschaft

$$\forall p \in \mathbb{R}[X], f \in W : pf \in W$$

besitzt.

43. Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Für ein Polynom $p = \sum_{j=0}^d a_j X^j \in K[X]$ setzen wir

$$p(A) = \sum_{j=0}^d a_j A^j;$$

hier steht A^0 natürlich für die Einheitsmatrix.

- (a) Geben Sie $p(A)$ für $p = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an.

- (b) Zeigen Sie, dass für $f, g \in K[X]$ gilt, dass

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(A) = f(A)g(A).$$

44. Es seien $u = (-1, 7, 12)$, $v = (1, 2, 3)$ und $w = (2, 1, 1) \in \mathbb{Q}^3$. Stellen Sie fest, ob $u \in \text{span}(\{v, w\})$ gilt.
45. Es sei $V = \mathbb{Q}^4$ und

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}, \\ M_2 &:= \{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Zeige, dass V von M_1 erzeugt wird, dass M_2 linear unabhängig ist, und ergänze M_2 durch Hinzunahme von Elementen aus M_1 zu einer Basis von V .

46. (a) Kann die Menge $\{(17, -16, 15), (51, -48, 45)\}$ zu einer Basis des \mathbb{R}^3 ergänzt werden?
 (b) Sei K ein Körper. Geben Sie zwei disjunkte Basen von $K^{2 \times 3}$ an.

47. Seien $f_i \in \mathbb{R}[t]$ ($i = 1, 2, 3$) gegeben durch

$$f_1 := (t - 1)^2, \quad f_2 := (t + 2)^2, \quad f_3 := (t + 1)(t + 2).$$

Prüfen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\}$ als Teilmenge des \mathbb{R} -Vektorraumes $\mathbb{R}[t]$ linear unabhängig ist.

48. Sei $P_3 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 3\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: es gibt eine Basis $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ von P_3 , sodass keines der Polynome f_1, \dots, f_4 Grad 2 hat.