49. Sei K ein Körper und f, g und $h \in K[X]$ mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $f \cdot g = f \cdot h$ folgt, dass $g = h$.

50. Sei $W = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid 2w + x + y + z = 0 \text{ und } 3w + 2x + y + z = 0\}$. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie eine Basis an.

51. Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$\{X - X^3, 1 + X^2 - 2X^3, -1 - 2X + X^3, -1 + X^2, 1 - X^2 - X^3, 2 - X^2\}$$

erzeugten Untervektorraums von $\mathbb{Q}[X]$.

52. Sei $d \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $P_d = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid \deg f \leq d\}$. Seien $f_0, \ldots, f_d \in K[X]$ mit $\deg f_j = j$ für $j \in \{0, \ldots, d\}$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, \ldots, f_d\}$ eine Basis von P_d ist.

53. Es sei K ein Körper und $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines K-Vektorraumes V. Zeige: Für $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ (mit $a_i \in K$) ist die Menge

$$\{u_1 - u,\ u_2 - u,\ \ldots,\ u_n - u\}$$

genau dann linear abhängig, wenn $a_1 + \cdots + a_n = 1$ ist.

54. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Definiere

$$\begin{aligned} k(V) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid\ & \text{es gibt Untervektorräume } V_i \text{ von } V,\ i = 0, \ldots, n\ , \\ & \text{so dass } V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n\}\ . \end{aligned}$$

Beweise: $k(V) = \dim V$.

55. Gegeben sind die Untervektorräume U und W des $\mathbb{R}^4$ durch

$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0\}, \\ W &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Man bestimme eine Basis von U, W, $U \cap W$ und $U + W$ sowie die Dimension von $U \cap W$ und $U + W$. Man untersuche, ob $U + W$ eine direkte Summe ist.

56. Sei $V := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$. Wir betrachten die Mengen $U := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid \forall x : f(-x) = -f(x)\}$ und $G := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid \forall x : f(-x) = f(x)\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass U und G Untervektorräume von V sind.
   (b) Zeigen Sie, dass $V = U \oplus G$.

57. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$$

und $W = \operatorname{span}\{A^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie, dass
   (a) (I, A) eine Basis von W ist,
   (b) W bezüglich der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.
   (c) Geben Sie alle Elemente von W explizit an und stellen Sie die Multiplikationstafel auf.
   (d) Ist W ein Körper?