58. Geben Sie drei Untervektorräume A, B, C des $\mathbb{R}^2$ an, sodass $A \cap B = \{0\}$, $B \cap C = \{0\}$ und $A \cap C = \{0\}$, aber $A + B + C$ keine direkte Summe ist.

59. Sind die folgenden Abbildungen linear? Beweisen oder widerlegen Sie.

    (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \binom{x_1}{x_2} \mapsto \binom{x_2}{5x_1+3x_2}$

    (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1x_2$

    (c) $f_3 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$

    (d) $f_4 : \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R} \quad g \mapsto g(1)$

    (e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \binom{|x_1|}{0}$

    (f) $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \binom{x_1}{x_2} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+1 \\ 2x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$

60. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$
und $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; x \mapsto A \cdot x$. Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Im} F_A$ und eine Basis von $\operatorname{Ker} F_A$.

61. Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{Ker} F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 5x_2 \text{ und } x_3 = -7x_4\}$. Zeigen Sie, dass F surjektiv ist.

62. Geben Sie sämtliche lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ mit

    (a) $\operatorname{Ker} F = \{(u, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 \mid w + x - y - 2z = 0 \wedge x - y - 3z = 0 \wedge y - 5z = 0\}$

    (b) $\operatorname{Ker} F = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1, 0)^t, (0, 1, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1, 0)^t\}$

    an.

63. Sind die folgenden Abbildungen lineare Abbildungen über dem Skalarenkörper $\mathbb{F}_2$?

    (a) $F : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2; (x, y) \mapsto x^2 + y^2$

    (b) $G : \mathbb{F}_2[X] \to \mathbb{F}_2[X]; f \mapsto f^2$

64. Seien V ein K-Vektorraum, U und W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Geben Sie einen Epimorphismus $P : V \to U$ an, sodass $P(u) = u$ für alle $u \in U$ und $P(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt. Zeigen Sie, dass es nur einen solchen Epimorphismus gibt. Was ist P^2?

65. (a) Seien V, W zwei K-Vektorräume mit $\dim V < \infty$ und $F : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum U von V gibt, sodass $V = U \oplus \operatorname{Ker} F$ und $\operatorname{Im} F = F(U)$ gilt.

    (b) Bestimmen Sie ein solches U für die Abbildung aus Aufgabe 60.

66. Sei $V = \mathbb{R}[T]$ und $W = \{f \in \mathbb{R}[T] \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}$.

    (a) Geben Sie einen Isomorphismus von V nach W an.

    (b) Zeigen Sie, dass W ein echter Untervektorraum von V (also $W \leq V$ mit $W \neq V$) ist, obwohl $\dim W = \dim V$.