67. Seien

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,-1,1)^t, & w_1 &= (-1,9)^t, \\ v_2 &= (-1,1,0)^t, & w_2 &= (3,0)^t, \\ v_3 &= (1,0,0)^t, & w_3 &= (9,0)^t. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(v_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$ sowie deren Matrixdarstellungen bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.

68. Für eine natürliche Zahl n sei $P_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq n\}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $D : P_2 \to P_1$ mit $D(\sum_j a_j X^j) = \sum_j j a_j X^{j-1}$. Als Basis von P_2 wählen wir 1, X, $(3X^2-1)/2$ (das sind die ersten drei Legendre-Polynome) und als Basis von P_1 die Laguerre-Polynome 1 und $-X+1$.

   (a) Geben Sie die Matrixdarstellung von D bezüglich dieser Basen an.

   (b) Geben Sie den Koordinatenvektor des Polynoms $f = 6 + 7X - 9X^2$ bezüglich der gegebenen Basis des P_2 (Legendre-Polynome) an.

   (c) Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Koordinatenvektors und der darstellenden Matrix $D(f)$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch direkte Anwendung von D.

69. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq r \neq s \leq n$, K ein Körper und $\alpha \in K$. Wir betrachten die Matrizen $L_{rs}(\alpha) = (\ell_{jk})_{1\leq j\leq n}$, $M_r(\alpha) = (m_{jk})_{1\leq j\leq n}$ und $V_{rs} = (v_{jk})_{1\leq j\leq n}$ mit

$$\ell_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k, \\ \alpha, & \text{wenn } (j,k) = (r,s), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad m_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k \neq r, \\ \alpha, & \text{wenn } j = k = r, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$v_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k \notin \{r,s\}, \\ 1, & \text{wenn } (j,k) \in \{(r,s),(s,r)\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Geben Sie für $n = 4$ die Matrizen $L_{3,2}(9)$, $M_3(12)$ und V_{24} an.

   (b) Stellen Sie für allgemeines n die Matrizen $L_{rs}(\alpha)$, $M_r(\alpha)$ und V_{rs} als Blockmatrizen dar, wobei nur Einheitsmatrizen, Nullmatrizen und vereinzelte (1×1)-Blöcke auftreten sollen.

   (c) Zeigen Sie, dass $L_{rs}(\alpha)$, $M_r(\alpha)$ (außer für $\alpha = 0$) sowie V_{rs} invertierbar sind und geben Sie jeweils die inversen Matrizen (möglichst wieder in Gestalt von $L_{r's'}(\alpha')$, $M_{r'}(\alpha')$, $V_{r's'}$ für ggf. neue Werte der Parameter r', s', α') an.

   (d) Erklären Sie, wie sich die Zeilen einer Matrix A verändern, wenn sie mit einer der drei gegebenen Matrizen von links multipliziert werden.

70. Sei K ein Körper,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

mit $ad - bc \neq 0$. Finden Sie alle x und $y \in K^2$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$A \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$

und kommentieren Sie das Ergebnis. Was geschieht, wenn $ad - bc = 0$?