71. Geben Sie zwei invertierbare Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an, sodass $A+B \neq 0$, aber $A+B$ nicht invertierbar ist.

72. Seien U, V, W drei K-Vektorräume mit $\dim U < \infty$ und $\dim V < \infty$ und $F : U \to V$ sowie $G : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\operatorname{Ker} G \circ F) \leq \dim \operatorname{Ker} G + \dim \operatorname{Ker} F.$$

73. Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt genau dann einen Epimorphismus von V nach W, wenn $\dim W \leq \dim V$.

    (b) Für ein $U \leq V$ gibt es genau dann einen Homomorphismus $F : V \to W$ mit $\operatorname{Ker} F = U$, wenn $\dim U \geq \dim V - \dim W$.

74. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Angenommen, für ein $v \in V$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $F^n(v) \neq 0$, aber $F^{n+1}(v) = 0$ (mit F^k ist $\underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k}$ gemeint und wie immer ist $F^0 = \mathrm{id}$). Beweisen Sie, dass dann $\{v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)\}$ linear unabhängig ist.