

75. (a) Seien  $U, V, W$  endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume und  $F : U \rightarrow V$  und  $G : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass  $\text{rank } G \circ F \in \{0, 1, \dots, \min\{\text{rank } G, \text{rank } F\}\}$ .
- (b) Gibt es lineare Abbildungen  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\text{rank } F = 2, \quad \text{rank } G = 2, \quad \text{rank } G \circ F = 0?$$

- (c) Seien  $m, n \in \mathbb{N}_0$  und  $r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$ . Geben Sie endlich-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume  $U, V, W$  sowie lineare Abbildungen  $F : U \rightarrow V$  und  $G : V \rightarrow W$  an, sodass

$$\text{rank } F = m, \quad \text{rank } G = n, \quad \text{rank } G \circ F = r.$$

76. Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $F, G$  zwei Endomorphismen von  $V$ . Zeigen Sie, dass  $F \circ G$  genau dann ein Automorphismus ist, wenn sowohl  $F$  als auch  $G$  Automorphismen sind.
77. Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $F$  ein Endomorphismus von  $V$ . Zeigen Sie, dass  $F$  genau dann ein skalares Vielfaches der Identität ist, wenn  $F \circ G = G \circ F$  für alle Endomorphismen  $G$  von  $V$  gilt.

78. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Geben Sie eine Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  an, sodass  $AB = I$ . Zeigen Sie, dass es keine Matrix  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  gibt, sodass  $CA = I$ .

79. Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{Q}$ . Sei weiters  $f : V \rightarrow W$  eine Abbildung, die der Bedingung

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in V$$

genügt.

- (a) Zeigen Sie, dass  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  für alle  $v \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{N}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  für alle  $v \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  für alle  $v \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , dass also  $f$  bereits linear ist.
- (d) Sei  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  ein Körper ist. Die Abbildung  $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  sei durch  $f(a + b\sqrt{2}) = a$  definiert. Gilt

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ? Ist  $f$  linear (über  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ )?

80. Geben Sie eine nicht lineare Funktion  $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  an, sodass  $f(\alpha v) = \alpha f(v)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{Q}$  und  $v \in \mathbb{Q}^2$  gilt.
81. Sei  $A = (1, 5), B = (10, 3), C = (5, 10)$ . Drehen Sie das Dreieck  $ABC$  um  $30^\circ$  in mathematisch negative Richtung
- (a) um den Ursprung
- (b) um den Punkt  $(0, 5)$

und geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte des gedrehten Dreiecks an.