84. Eine beliebte **Faustregel** für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ besagt:

    Ist die Anzahl m der Gleichungen größer (gleich) [kleiner] als die Anzahl n der Unbekannten, dann gibt es keine (genau eine) [mehrere] Lösung[en]. Ferner ist die Anzahl der freien Parameter in der allgemeinen Lösung gleich $m - n$, falls $m \geq n$. Diese Regel trifft zwar in den „meisten“ Fällen zu, aber doch nicht immer, wie die Beispiele (a) bis (c) zeigen.

    (a) Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und zwei Unbekannten an, das genau eine Lösung besitzt.

    (a') Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und zwei Unbekannten an, das mehrere Lösungen besitzt.

    (b) Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und drei Unbekannten an, das unlösbar ist.

    (b') Geben Sie ein System mit drei linearen Gleichungen und drei Unbekannten an, das mehrere Lösungen besitzt.

    (c) Geben Sie ein System mit $m = 1$ und $n = 2010$ an, das unlösbar ist.

    (d) Wann ist ein System mit m linearen Gleichungen und n Unbekannten lösbar? Wie berechnet man die Anzahl der freien Parameter?

    (e) Wann hat ein System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten genau eine Lösung?

85. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$, wobei

    (a)
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

    (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 29 \\ -57 \end{pmatrix}.$$

86. Wir betrachten die Untervektorräume U und W des $\mathbb{Q}^4$ mit

$$U = \operatorname{span}\{(1,-1,2,1)^t, (2,1,-1,2)^t, (0,-3,5,0)^t\},$$
$$W = \operatorname{span}\{(3,1,1,4)^t, (-1,3,-3,0)^t, (5,0,3,6)^t\}.$$

    Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$. Handelt es sich um eine direkte Summe?

87. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ky & - & (k+1)z & = & k-7 \\ (1-k)x & - & ky & + & (2k-1)z & = & 3k-1 \\ kx & + & 4y & - & 6z & = & -10 \end{array}$$

    (i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen bzw. (iii) keine Lösung? Für die Fälle (i) und (ii) sind die Lösungen in Abhängigkeit von k anzugeben.

88. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

    (a) Bestimmen Sie A^{-1} für $\alpha = 2$.