(c) Sei $A \in K^{n\times n}$. Beschreiben Sie, was die Multiplikation einer Matrix A mit einer Permutationsmatirx P_π von links bzw. von rechts bewirkt.

99. Geben Sie eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L (deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind) und eine obere Dreiecksmatrix R an, sodass $B = PLR$, wobei B die Matrix aus Aufgabe 92 ist.

100. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\operatorname{sign}\sigma = 1$ gleich der Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\operatorname{sign}\sigma = -1$ ist.

101. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & d_1 \\ \vdots & \ddots & d_2 & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_n & ? & \dots & ? \end{pmatrix},$$

wobei die ? jeweils für beliebige Einträge stehen können.

102. In $\mathbb{R}[t]$ ist die Familie

$$(1 - t + at^2, 1 + t + bt^2, 1 + t^2)$$

gegeben. Man untersuche, für welche a, $b \in \mathbb{R}$ die Familie linear unabhängig ist.

103. Die Spur $\operatorname{tr}(A)$ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist durch $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ definiert. Zeigen Sie für A, $B \in K^{n\times n}$:

(a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(B + A)$,

(b) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$,

(c) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^t)$,

(d) Falls B regulär ist: $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$.

Wie könnte man die Spur eines Endomorphismus definieren?

104. Wahr oder falsch (Beweis oder Gegenbeispiel)? Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$,

(b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$,

(c) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$,

(d) $\det(A^n) = (\det(A))^n$.

105. Seien K ein Körper und $x_1, \dots, x_n \in K$. Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$