106. Berechnen Sie mittels 3 verschiedener Methoden $\det A$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

107. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + (2a-8)\,y + (3+3a)\,z &= 3+6a \\ 2x + (-11+3a)\,y + (7+4a)\,z &= 9+8a \\ 4x + (-12+4a)\,y + (12+6a)\,z &= 16+12a \end{aligned}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt dieses Gleichungssystem (i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen, (iii) keine Lösung? Berechnen Sie im Fall (ii) alle Lösungen in Abhängigkeit von a. Verwenden Sie, wo sinnvoll, Determinanten!

108. Lösen Sie Aufgabe 87 für den Fall regulärer Systemmatrix unter Verwendung der Cramerschen Regel.

109. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ und D eine Drehmatrix. Zeigen Sie, dass dann $\det(a_1, a_2) = \det(Da_1, Da_2)$ gilt. Charakterisieren Sie geometrisch, wann $\det(a_1, a_2) > 0$ gilt.

110. Seien $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, $g = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in K[X]$ mit $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$. Man definiert die Sylvestermatrix von f und g als die $(m+n) \times (m+n)$-Matrix

$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \ddots & a_{m-1} & a_m & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \ddots & b_{n-1} & b_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizienten von f über n und die Koeffizienten von g über m Zeilen wiederholt werden. Die Determinante der Sylvestermatrix heißt die *Resultante* $\operatorname{Res}(f,g)$ von f und g.

(a) Sei $f = aX^2 + bX + c$ und $f' = 2aX + b$. Bestimmen Sie $\operatorname{Res}(f, f')$.

(b) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bzw. $\beta_1, \dots, \beta_n$ die Nullstellen von f bzw. g. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es sich dabei um $m+n$ paarweise verschiedene Elemente von K handelt.

Zeigen Sie durch Multiplikation der Sylvester-Matrix mit einer $(m+n) \times (m+n)$-Matrix wie in Aufgabe 105 (in ihr sollen alle Nullstellen auftreten), dass

$$\operatorname{Res}(f,g) = a_m^n b_n^m \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\beta_k - \alpha_j) = b_n^m \prod_{k=1}^{n} f(\beta_k) = (-1)^{mn} a_m^n \prod_{j=1}^{m} g(\alpha_j).$$