1. (a) Berechnen Sie das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2010 \\ -2000 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   (b) Zeigen Sie: Die Elemente $a, b \in K^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $a \times b = 0$.

2. (a) Sei $u + W$ eine Ebene im K^3 mit $W = \text{span}\{a, b\}$. Setze

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = a \times b.$$

   Zeigen Sie, dass es dann ein $d \in K$ gibt, sodass

$$u + W = \{(x, y, z)^t \in K^3 \mid c_1x + c_2y + c_3z = d\},$$

   wobei Sie so wenig wie irgendwie möglich rechnen sollen. (Hinweis: Lineare Algebra 1, Aufgabe 93.) Da K ein beliebiger Körper ist, kann nicht über Orthogonalität argumentiert werden.

   (b) Geben Sie eine Verallgemeinerung des Kreuzprodukts auf Dimension $n \geq 2$ an, wo $(n-1)$ Vektoren zu einem Vektor „multipliziert“ werden und für Hyperebenen (also affine $(n-1)$-dimensionale Teilräume) im Wesentlichen dieselben Resultate wie oben gelten. Wieder sollen große Determinanten vorkommen.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x, y, z) \in V \mid 2x - y + z = 0\} \subseteq V$.

   (a) Bestimmen Sie so genau als möglich (d.h. durch Angabe aller äquivalenten Elemente) die Äquivalenzklassen bezüglich U von $(0, 0, 0)$ und von $(1, 0, -1)$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch im Zusammenhang mit V und U.

   (b) Bestimmen Sie $\dim(V/U)$.

   (c) Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach V/U für ein passendes n an.

   (d) Geben Sie ein Repräsentantensystem an.

4. Sei $V = \mathcal{C}[0, 1]$ (also der Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen reelwertigen Funktionen) und sei $U = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(1) = 0\} \leq V$.

   (a) Seien $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$. Bestimmen Sie $f + U$ und $g + U$.

   (b) Bestimmen Sie $\dim(V/U)$.

   (c) Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach V/U für ein passendes n an.

   (d) Geben Sie ein Repräsentantensystem an.

5. Richtig oder falsch? Sei U ein Untervektorraum von V.

   (a) Der Quotientenraum V/U ist ein Unterraum von V.

   (b) Der Quotientenraum V/U ist ein Vektorraum.

   (c) Der Quotientenraum V/U ist eine Äquivalenzklasse von U.

   (d) Der Quotientenraum V/U ist eine Menge von Äquivalenzklassen.

   (e) Aus $v + U = U$ folgt $v = 0$, weil $0 + U = U$.

   (f) Aus $v + U = U$ folgt $v = 0$, weil $v + U = 0 + U$.

   (g) Aus $v + U = U$ folgt $v = 0$, durch Addition von $-U$.

   (h) Aus $v + U = U$ folgt $v \in U$, weil $0 \in U$.

6. Sei U ein m-dimensionaler Unterraum eines n-dimensionalen Vektorraums V (über einem Körper K). Sei $(b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U. Diese können wir zu einer Basis $(b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n)$ von V ergänzen. Wir betrachten nun den Faktorraum V/U. Zeigen Sie, dass $(b_{m+1} + U, \ldots, b_n + U)$ eine Basis von V/U ist.

7. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und seien $u = (1, 0, 1, -1)^t$, $v = (1, -1, 2, 0)^t$ und $w = (1, 1, 0, -1)^t$. Wir setzen dann $U = \operatorname{span}\{u, v\}$ und $W = \operatorname{span}\{w\}$. Bestimme eine Basis von $U \cap W$, $U + W$ und den Faktorräumen $(U + W)/(U \cap W)$ bzw. $V/(U + W)$.

8. Sei $V = \mathbb{Q}^4$. Als Basis von V wählen wir

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die dazu duale Basis des Dualraums V^*.

9. Sei $V = \mathbb{Q}^3$. Von der Basis (v_1, v_2, v_3) von V ist nur die dazu duale Basis (f_1, f_2, f_3) des Dualraums V^* bekannt, wobei

$$\begin{aligned} f_1 &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - x_2, \\ f_2 &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_3, \\ f_3 &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - x_2 + x_3. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie (v_1, v_2, v_3).

10. Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$, A eine Basis von V und B eine Basis von W. Den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}(V, W)$. Für ein $F \in \operatorname{Hom}(V, W)$ sei $\mathcal{M}(F)$ die Matrixdarstellung von F bezüglich der Basen A und B. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Vektorraumisomorphismus von $\operatorname{Hom}(V, W)$ nach $K^{m \times n}$ ist.

11. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_1)$ mit $\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$ ein normierter Raum ist. Es sind die Normaxiome zu überprüfen, und zwar genauer als in der Vorlesung, wo dies nur durch Händefuchteln geklärt wurde.

12. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_\infty)$ mit $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ ein normierter Raum ist. Wieder mit genauem Beweis.

13. Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie positive Konstanten c_1, c_2 (abhängig von n), sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq c_2 \|x\|_1$$

   gilt. Sie sollen also den Normäquivalenzsatz für dieses Paar von Normen direkt überprüfen.

14. Sei $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Berechnen Sie $\|D\|_1$, $\|D\|_2$, $\|D\|_\infty$, $\|D\|_F$.

15. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen eines Vektorraums V ist. (Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c_1 und c_2 gibt, sodass $c_1\|x\| \leq \|x\|' \leq c_2\|x\|$ für alle $x \in V$ gilt.)

16. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$

$$\|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

gilt.
Hinweis. Vorlesung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

17. Zeigen Sie: Für eine induzierte Operatornorm gilt:
    (a) $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
    (b) Ist A invertierbar, so gilt $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$.

18. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

(Spaltensummennorm) gilt.

19. Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.

20. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt, dass $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$.

21. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und T ein Automorphismus von V. Zeigen Sie, dass dann durch
$$\|x\|_T := \|T(x)\|$$
eine weitere Vektornorm auf V definiert ist.
    (b) Geben Sie (unter der Voraussetzung, dass $\dim V < \infty$) positive Konstanten c_1 und c_2 in Abhängigkeit von $\|T\|$ und $\|T^{-1}\|$ an, sodass
$$c_1\|x\| \leq \|x\|_T \leq c_2\|x\|$$
für alle $x \in V$ gilt.

22. Bestimmen Sie die Konditionszahl bezüglich der ∞-Norm der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

wobei c und d die mit einem Lineal gemessenen Längen der Strecken

sind. Bestimmen Sie x und y. Geben Sie an, um wieviel Prozent Ihre Werte x bzw. y durch Messfehler höchstens beeinflusst sind. **Begründen Sie jeden Schritt ausführlich!**

24. Zeigen Sie, dass für jede quadratische Matrix A und jede Vektornorm $\|\cdot\|$ die entsprechende Konditionszahl $\kappa(A) \geq 1$ ist.

25. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Gibt es immer Vektoren $b \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta b \in \mathbb{C}^n$, sodass für die Lösungen $x \in \mathbb{C}^n$ und $x + \Delta x \in \mathbb{C}^n$ der linearen Gleichungssysteme
$$Ax = b \qquad A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$
gilt, dass
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \ ?$$
Ist also die Sensitivitätsabschätzung für die Störung der rechten Seite scharf?

(b) Konkrete Fassung von (a):
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty.$$
Bestimmen Sie konkret b, Δb, x, Δx wie im Teil (a) gefordert.

26. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, b, Δb, x, $\Delta x \in \mathbb{C}^n$ mit $Ax = b$ und $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Zeigen Sie:
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \ .$$

27. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und B eine $(r \times s)$-Teilmatrix von A, die durch Auswahl von r Zeilen und s Spalten von A entsteht.

(a) Geben Sie (möglichst einfache) Matrizen $S \in \mathbb{C}^{r\times m}$ und $T \in \mathbb{C}^{n\times s}$ an, sodass $B = SAT$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle p mit $1 \leq p \leq \infty$ die Abschätzung $\|B\|_p \leq \|A\|_p$ gilt.

28. Sei
$$A = \begin{pmatrix} \frac{68}{5} & \frac{24}{5} \\ \frac{24}{5} & \frac{82}{5} \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\|A\|_2$, indem Sie die entsprechende Extremwertaufgabe durch Differentialrechnung lösen.

29. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^2$ durch $\langle (x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t \rangle := x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_2$ ein Skalarprodukt definiert wird, das nicht positiv definit ist. Geben Sie einen Vektor x an, sodass $\langle x, x \rangle < 0$.

30. Berechnen Sie $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u - v\|$ für $u = (2 - i, 3 + 2i)^t$ und $v = (3 - 2i, 2 + i)^t$.

31. Das Methanmolekül CH_4 ist so angeordnet, dass das Kohlenstoffatom im Mittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders ist, an dessen Ecken sich die Wasserstoffatome befinden. Wir nehmen als Eckpunkte des Tetraeders die Punkte $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, und $(0, 1, 1)$ [Beweisen Sie, dass alle Kanten gleich lang sind!] an. Berechnen Sie den Winkel zwischen zwei der Strahlen vom Schwerpunkt zu den Ecken des Tetraeders.

32. Sei $v_1, \ldots, v_m$ ein Orthogonalsystem in einem unitären Raum. Zeigen Sie, dass

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m\|^2 = |\alpha_1|^2 \|v_1\|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 \|v_m\|^2 .$$

33. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und a, b, c, $d \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie die Lagrangesche Identität

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle.$$

Folgern Sie daraus

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$$

und

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta,$$

wobei θ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Letztere Formel wurde in der Vorlesung über die geometrische Deutung der Determinante als orientiertes Volumen bewiesen, ist aber hier unabhängig davon herzuleiten.

34. Sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ der Vektorraum der quadratischen $(n \times n)$-Matrizen. Definiere $\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(A \cdot B)$.

    (a) Zeigen Sie: Durch obige Funktion wird ein Skalarprodukt definiert.

    (b) Zeigen Sie: Wenn das Skalarprodukt auf dem Vektorraum V' der symmetrischen $n \times n$-Matrizen betrachtet wird, so ist es positiv definit.

    (c) Man gebe ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\langle A, A \rangle < 0$ an.

    (d) Man zeige, dass durch $\langle A, B \rangle' := \operatorname{tr}(A^t \cdot B)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf V definiert wird.

35. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Innerer-Produkt-Raum, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrixdarstellung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich B.

    (a) Wir betrachten die neue Basis $B' = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + \alpha v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, wobei $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}$; es wird also v_j durch $v_j + \alpha v_i$ ersetzt. Wie sieht dann die Matrixdarstellung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich B' aus?

    (b) Geben Sie (unter Verwendung von obiger Beobachtung) ein Verfahren an, um eine neue Basis C zu erhalten, bezüglich der $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

    (c) Wenden Sie dieses Verfahren auf das Innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    an.

    (d) Dasselbe für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

36. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
    (a) Es gibt ein degeneriertes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $v \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$.
    (b) Es gibt ein nicht-degeneriertes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $v \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$.
    (c) Es gibt ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $v \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$.

37. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $q : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form. Man zeige, dass q homogen vom Grad 2 ist: für alle $x \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$.

38. Welche der folgenden Funktionen ist eine quadratische Form? Geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Euklid'schen Raum und sein Skalarprodukt an.
    (a) $f_1(x, y, z) := x^3 + \ln(y) + z^2$,
    (b) $f_2(x, y, z) := 5x^2 + 28xy + 14y^2 + 32xz + 14yz + 4z^2$,
    (c) $f_3(x, y) := 2x^2 + 13xy + y^2 + 2x + 4y + 27$.

39. Zeigen oder widerlegen Sie:
    (a) Eine positiv definite Matrix kann keine negative Einträge haben.
    (b) Wenn A und B symmetrisch sind, dann ist auch AB symmetrisch.
    (c) Wenn A und B positiv definit sind, dann ist auch AB positiv definit.

40. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & y \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix}$$
    positiv definit?

41. Wir sagen, dass in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ die *Parallelogrammgleichung* erfüllt ist, wenn für alle x, $y \in V$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
    gilt.
    (a) Sei $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein reeller Innerer-Produkt-Raum. Zeigen Sie, dass die durch dieses innere Produkt induzierte Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt.
    (b) Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, in dem die Parallelogramm-Gleichung erfüllt ist, und definiere $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ durch
$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$
    Wodurch ist diese Definition motiviert? Zeigen Sie, dass dann für alle x, y, $z \in V$ die Beziehung
$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$
    gilt.
    (c) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von 41b, dass für alle x, $y \in V$ und alle *rationalen* α auch
$$\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$
    gilt.
    (d) Gleich wie 41c, aber jetzt für *reelles* α. Zeigen Sie auch, dass $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ tatsächlich ein positiv definites Skalarprodukt ist. Was ist die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm?
    (e) Geben Sie einen reellen normierten Raum an, in dem die Parallelogrammgleichung nicht gilt.

42. Betrachte $V := \mathbb{R}^2$ mit dem inneren Produkt $\langle u, v\rangle_M := u^t M v$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $A(x, y) := (x-y, 2x+y)$. Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung zu A bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

43. Sei $\mathbb{P}_1$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 1. Bestimmen Sie die zu $F : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, $F(a + bx) := 5a + (2a + 3b)x$ adjungierte Abbildung bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle := \int_0^1 6 f(x) g(x)\, dx$.

44. Sei V ein unitärer (Euklidscher) Raum, $f : V \to V$ linear und $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. M sei die Matrixdarstellung von f bezüglich B. Zeigen Sie, dass dann die Matrixdarstellung der adjungierten linearen Abbildung f^* durch M^* gegeben ist.

45. Betrachte $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB)$, den Untervektorraum U der symmetrischen und den Untervektorraum W der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass $W = U^\perp$.

46. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Raum, W ein Unterraum, A eine lineare Abbildung auf V und A^* die zugehörige adjungierte Abbildung. Zeigen Sie: Aus $A(W) \subseteq W$ folgt $A^*(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d. h. falls W bezüglich A invariant ist, dann ist $W^\perp$ bezüglich A^* invariant.

47. Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ und $D : V \to V$, $D(f) = f'$ der Differentialoperator, $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$.

    (a) Bestimmen Sie die zu D adjungierte Abbildung auf dem Unterraum der Polynome mit $f(0) = f(1) = 0$.

    (b) Zeigen Sie: D besitzt keine adjungierte Abbildung.

    (c) Bestimmen Sie die zu D adjungierte Abbildung auf dem Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 1.

48. Sei $W := \mathrm{span}\{(1, 2, 1, 2)^t, (-2, 1, -2, 1)^t, (1, 1, 1, -2)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$ und $v = (1, 2, 3, 4)^t$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von v auf W.

49. Projizieren Sie den Vektor $(1, 2, 3, 4)^t$ auf den durch

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

    gegebenen Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

50. Sei V ein Euklidscher Raum und W ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Definiere $T : V \to V$ durch $T(v) := w - w'$, wobei $v = w + w'$ die Darstellung von v bezüglich der direkten Summe $V = W \oplus W^\perp$ ist. Zeigen Sie: T ist selbstadjungiert und unitär.

51. Geben Sie einen Vektorraum V an, für den die unitäre Gruppe $U(V) = \{F : V \to V \text{ unitär}\}$ *nicht* kommutativ ist.

52. Projizieren Sie den Vektor $(10, 5, 10, 15, 2, 0, 16, -5)^t$ auf den durch

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + 2x_7 - 2x_8 = 0$$

gegebenen Teilraum des $\mathbb{R}^8$.

53. Es sei V ein reeller Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Für a, b, $c \in V$ gelte $\|a\| = \|b\| = \|c\| = \|a-b\| = \|b-c\| = \|c-a\| = 1$. Zeigen Sie, dass a, b, c linear unabhängig sind.

54. Wir betrachten den Raum $\mathcal{C}[-1, 1]$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des Teilraums, der von den Funktionen $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ aufgespannt wird.

55. Bestimmen Sie (ohne Differentiation) jenes lineare Polynom $p(x)$, welches

$$\int_0^1 (p(x) - x^3)^2\,dx$$

minimiert.

56. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem positiv definiten Skalarprodukt. Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ein Orthonormalsystem. Für alle $v \in V$ gelte

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i \rangle^2.$$

Zeigen Sie, dass dann $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V ist.

57. Sei V ein Innerer-Produkt-Raum mit positiv definitem inneren Produkt, W ein endlichdimensionaler Teilraum von V mit Orthogonalbasis $\{w^1, \ldots, w^n\}$. Leiten Sie *direkt* aus der Definition der Projektion, d.h. ohne Verwendung von adjungierten Abbildungen, allgemeinen Formeln für die Projektion etc., die Formel

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle w^j, x \rangle}{\langle w^j, w^j \rangle} w^j$$

her.

58. Spiegeln Sie den Vektor $(27, 03, 20, 09)^t \in \mathbb{R}^4$ am Untervektorraum $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + 2x_4 = 0\}$.

59. Deuten Sie die durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot x$$

gegebene Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ geometrisch.

60. Sei A eine unitäre Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass dann alle Diagonalelemente Absolutbetrag 1 haben und daher die Form $e^{i\theta}$ für ein reelles θ haben. Was folgt daraus für reelle orthogonale Diagonalmatrizen?

61. Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

62. Gegeben sei die untenstehende Drehmatrix in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die dazugehörige Drehachse und den dazugehörigen Drehwinkel.

63. Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

64. Gegeben seien folgende Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 6$:

$$(-3,-7), (-2,-5), (-1,1), (1,-1), (2,-1), (3,-9).$$

Finden Sie jenes Polynom $p(x)$ von Grad 2, welches die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 6$, im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert, d.h., die Summe $\sum_{i=1}^{6}(p(x_i) - y_i)^2$ minimiert.

65. (a) Bestimmen Sie die Pseudoinverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei A regulär. Beweisen Sie, dass ihre Pseudoinverse gleich der Inversen ist.

66. Ein Fahrzeug wird (mit konstanter Verzögerung) abgebremst. Nach 10, 20, ..., 70 Metern wird die Durchfahrtszeit gemessen:

$s(t)$	10	20	30	40	50	60	70
t	0.37	0.77	1.21	1.70	2.26	2.94	3.86

Berechnen Sie eine Näherung der Startgeschwindigkeit und der Verzögerung sowie die Länge des Bremsweges.

67. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \\ -4 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

68. Welche der folgenden linearen Operatoren sind diagonalisierbar?

(a) $T(f) = f' + f''$ auf dem VR der Polynome vom Grad ≤ 3.

(b) $T(A) = A^t$ auf $K^{2\times 2}$.

69. Sei V der Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen und $D : V \to V$, $D(f) = f'$. Zeigen Sie: $v(t) = \sin(kt)$ und $w(t) = \cos(kt)$ sind Eigenvektoren von D^2. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte?

70. A sei eine relle $n \times n$-Matrix mit geradem n. Zeigen Sie: Wenn $\det(A) < 0$, dann hat A mindestens zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

71. Ist die (100×100)-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 100 & 100 & 100 & \dots & 100 & 100 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis von Eigenvektoren (und die zugehörigen Eigenwerte) an.

72. Ist die (2010×2010)-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2010 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2010 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2010 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2010 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2010 \end{pmatrix} = (1 + 2009\delta_{jk})_{\substack{1 \le j \le 2010 \\ 1 \le k \le 2010}}$$

diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis von Eigenvektoren (und die zugehörigen Eigenwerte) an.

73. Sei $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

    (a) 0 ist ein Eigenwert der geometrischen Vielfachheit $n - 1$.

    (b) A hat Rang 1.

    (c) Es gibt a und $b \in K^n \setminus \{0\}$, sodass $A = ab^t$.

    Geben Sie einen Eigenvektor und einen zugehörigen Eigenwert ungleich 0 von A an, wenn es die Darstellung $A = ab^t$ besitzt.

74. Sei $A \in K^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert der geometrischen Vielfachheit $\rho(\lambda)$ von A. Zeigen Sie, dass es dann auch einen „Linkseigenvektor“ $y \in K^n$ (ungleich 0) gibt, sodass $y^t A = \lambda y^t$. Zeigen Sie weiters, dass die Menge dieser Linkseigenvektoren (vereinigt mit $\{0\}$) einen Untervektorraum der Dimension $\rho(\lambda)$ des K^n bildet.

75. Sei $A \in K^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

    (a) Zeigen Sie, dass es dann Matrizen $M_1, \dots, M_n$ vom Rang 1 gibt, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

    $$A^k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k M_j$$

    gilt.

    (b) Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden, $x^1, \dots, x^n$ die zugehörigen Eigenvektoren und $y^1, \dots, y^n$ die zugehörigen Linkseigenvektoren und die Eigenvektoren derart gewählt sind, dass $(y^j)^t \cdot x^j = 1$ für $1 \le j \le n$, so gilt $M_j = x^j \cdot (y^j)^t$.

76. Sei $A \in K^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit n. Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

77. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 19 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 19 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -14 & 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2010\times 2010}.$$

Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^{2010}$ an, die aus Eigenvektoren von A besteht.

78. Geben Sie die Jordan-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -19 \\ -6 & 15 & 20 \\ 6 & -17 & -22 \end{pmatrix}$$

an. Dabei sind auch die Transformationsmatrizen anzugeben.

79. Finden Sie die Jordanzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_2$ (inklusive der Transformationsmatrizen).

80. Sei V der Vektorraum der Polynome in x mit reellen Koeffizienten und $D : V \to V$, $D(f) = f'$ der Differentialoperator.

    (a) Bestimme alle Eigenwerte von D.

    (b) Sei $\mathbb{P}_n$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. $\mathbb{P}_n$ ist ein D-invarianter Unterraum, sodass wir D als Selbstabbildung von $\mathbb{P}_n$ auffassen können. Ermittle für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Basis B_n, sodass D bzgl. dieser Basis Jordansche Normalform besitzt.

81. $J_r(\lambda)$ steht für einen $(r \times r)$-Jordanblock zum Eigenwert λ.

    (a) Bestimmen Sie

$$\dim \ker(J_5(3) - 3I)^k$$

    für $0 \leq k \leq 10$.

    (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & & \\ & J_2(3) & & & & & & \\ & & J_3(3) & & & & & \\ & & & J_3(3) & & & & \\ & & & & J_5(3) & & & \\ & & & & & J_2(9) & & \\ & & & & & & J_2(9) \end{pmatrix}.$$

    Bestimmen Sie

$$\dim \ker(A - 3I)^k, \qquad \dim \ker(A - 9I)^k, \qquad \dim \ker(A - 2I)^k$$

    für $0 \leq k \leq 10$.

(c) Sei $F : K^{17} \to K^{17}$ ein Endomorphismus, von dem bekannt sei, dass

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\dim \ker(F-2I)^k$	5	10	15	16	16	16	16	16	16
$\dim \ker(F-3I)^k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\dim \ker(F-4I)^k$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.

Bestimmen Sie eine Jordanform von F (ohne Transformationsmatrizen).

82. Finden Sie die Jordanzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_3$ (inklusive der Transformationsmatrizen), wobei $\mathbb{F}_3 = \{-1, 0, 1\}$ mit

$+$	-1	0	1
-1	1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	-1

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

83. $J_r(\lambda)$ steht für einen $(r \times r)$-Jordanblock zum Eigenwert λ.

(a) Bestimmen Sie

$$\dim \ker(J_4(2) - 2I)^k$$

für $0 \leq k \leq 7$.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & & & & & \\ & J_4(1) & & & & & & \\ & & J_4(1) & & & & & \\ & & & J_5(1) & & & & \\ & & & & J_5(1) & & & \\ & & & & & J_1(2) & & \\ & & & & & & J_3(2) & \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\dim \ker(A - 1I)^k, \qquad \dim \ker(A - 9I)^k, \qquad \dim \ker(A - 2I)^k$$

für $0 \leq k \leq 10$.

(c) Sei $F : K^{19} \to K^{19}$ ein Endomorphismus, von dem bekannt sei, dass

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\dim \ker(F + 2I)^k$	4	8	12	14	16	16	16	16	16
$\dim \ker(F + 3I)^k$	2	3	3	3	3	3	3	3	3
$\dim \ker(F + 4I)^k$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.

Bestimmen Sie eine Jordanform von F (ohne Transformationsmatrizen). Erklären Sie ausführlich, wie Sie zu Ihrem Ergebnis kommen.

84. Untersuchen Sie das Verhalten des Hühner-Füchse-Modells aus der Vorlesung,

$$F_{n+1} = 0.6F_n + 0.5H_n,$$
$$H_{n+1} = -kF_n + 1.2H_n,$$

in Abhängigkeit von k. Für die Startwerte $F_0 = 100$ und $H_0 = 1000$ soll (in Abhängigkeit von k) eine explizite Formel für F_n und H_n angegeben werden, wobei jeweils der asymptotisch „dominante“ Term zu kennzeichnen ist. Für welche Werte von k sind die Werte von F_n und H_n beschränkt, unbeschränkt, eine Nullfolge? Geben Sie für den Wert $k = 1/10$ Startwerte F_0, H_0 an, sodass die beide Folgen konvergieren bzw. divergieren.

85. Sei $w = \frac{1}{\sqrt{2005}}(1, 1, \ldots, 1, 1)^t \in \mathbb{R}^{2005}$ und $P_w := I - w \cdot w^t$. Deuten Sie P_w geometrisch und bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von P_w.

86. Gegeben sind jeweils zwei Matrizen A und B. Sind die Matrizen A und B ähnlich? Geben Sie eine reguläre Matrix S an, sodass $B = S^{-1}AS$ oder zeigen Sie, dass es keine solche geben kann.

    (a)
    $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    (b) A wie oben, $B = A^t$.

87. Wahr oder falsch? Zwei quadratische Matrizen A und B, deren charakteristische Polynome, Eigenwerte, algebraische und geometrische Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen, sind ähnlich. (Beweis oder Gegenbeispiel).

88. Bestimmen Sie die Jordan-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -439 & 881 & -440 & 0 & -130 & 520 & -836 & 744 & -476 & 264 \\ -375 & 751 & -374 & 0 & -115 & 460 & -740 & 660 & -424 & 236 \\ -312 & 624 & -311 & 1 & -100 & 400 & -644 & 576 & -372 & 208 \\ -252 & 504 & -252 & 1 & -84 & 340 & -548 & 492 & -320 & 180 \\ -196 & 392 & -196 & 0 & -69 & 281 & -452 & 408 & -268 & 152 \\ -145 & 290 & -145 & 0 & -55 & 221 & -355 & 324 & -216 & 124 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & -40 & 160 & -259 & 241 & -164 & 96 \\ -62 & 124 & -62 & 0 & -26 & 104 & -170 & 161 & -112 & 68 \\ -32 & 64 & -32 & 0 & -14 & 56 & -92 & 88 & -63 & 41 \\ -11 & 22 & -11 & 0 & -5 & 20 & -33 & 32 & -24 & 17 \end{pmatrix}.$$

    Für Matrizenmultiplikationen, Berechnung von Determinanten, Inversion von Matrizen und Lösung von linearen Gleichungssystemen kann ein Computeralgebrasystem benutzt werden. Die Matrix ist unter

    `http://www.math.tugraz.at/~cheub/lv/LinAlg2/Uebungsbeispiele/matrix348.txt`

    erhältlich.

89. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & -1 & -7 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & -3 & -8 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 20 & 1 & 12 & -14 & -23 & 11 & 3 & -6 & 16 \\ -24 & -1 & -13 & 14 & 25 & -11 & -3 & 6 & -18 \\ 13 & 1 & 8 & -10 & -16 & 9 & 2 & -5 & 11 \\ -17 & -1 & -8 & 9 & 17 & -7 & -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

(`http://www.math.tugraz.at/~cheub/lv/LinAlg2/Uebungsbeispiele/matrix531.txt`)

(a) Bestimmen Sie eine Jordanmatrix J, die ähnlich zu A ist.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

(c) Bestimmen Sie eine Jordanzerlegung von A, also eine reguläre Matrix T, sodass $T^{-1}AT$ eine Jordanmatrix ist.

Für Matrizenmultiplikationen, Berechnung von Determinanten, Inversion von Matrizen, Bestimmen von Rängen und Lösung von linearen Gleichungssystemen kann ein Computeralgebrasystem benutzt werden.

90. Sei $A = TJT^{-1}$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Jordanzerlegung von A^t an (inkl. Transformationsmatrizen).

91. Wir betrachten eine rekursiv gegebene Folge

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ H_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist unbekannt, wohl sind aber die ersten Terme der Folge bekannt. Bestimmen Sie alle möglichen Matrizen A.

(a)

n	0	1	2	3	4
F_n	2	8	28	92	292
H_n	6	20	64	200	616

(b)

n	0	1	2	3	4
F_n	2	6	18	54	162
H_n	4	12	36	108	324

92. Zeigen Sie (möglichst ohne aufwändige Rechnung), dass für

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

und jeden beliebigen Vektor x die Folge $A^n x$ gegen den Nullvektor konvergiert.

93. Für welche Vektoren $z^0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert die rekursiv durch

$$z^{k+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} z^k, \qquad k \geq 0,$$

gegebene Folge?

94. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Man zeige, dass für die durch diese Norm induzierte Operatornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ und jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt, dass

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Spektralradius ($\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$) keine Matrixnorm ist.

95. Lösen Sie die folgenden linearen Rekursionen:

(a) $x_{n+2} = 16x_{n+1} - 60x_n$ für $n \geq 0$ und $x_0 = 22$, $x_1 = 212$.

(b) $x_{n+4} = 25x_{n+3} - 225x_{n+2} + 875x_{n+1} - 1250x_n$ für $n \geq 0$ und $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (3, 150, 2450, 26000)$

(c) $x_{n+3} - 9x_{n+2} + 24x_{n+1} - 20x_n = -54(-1)^n - 72 \cdot 2^n$ für $n \geq 0$ und $(x_0, x_1, x_2) = (3, 16, 94)$.

96. Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Cayley-Hamilton an diesem Beispiel.

(b) Stellen Sie A^3 und A^4 je als Linearkombination von $A^0 = I$, A, A^2 dar.

97. Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass

$$A^2 - 2A + I = 0$$

und höchstens 4 Einträge von A gleich 0 sind.

98. Lösen Sie die lineare Rekursion

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 12n3^n \text{ für } n \geq 0 \text{ und } (x_0, x_1) = (15, 18).$$

99. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $F : V \to V$ ein Endomorphismus, p_F sein charakteristisches Polynom und m_F sein Minimalpolynom. Das charakteristische Polynom von F zerfalle über K in Linearfaktoren.

    (a) Zu F gebe es ein $x \in V$, sodass $(x, F(x), \ldots, F^{n-1}(x))$ eine Basis von V ist und $C \in K^{n\times n}$ sei die Matrix von F bezüglich dieser Basis. Drücken Sie die Koeffizienten von p_F durch die Matrixelemente von C aus und umgekehrt. Geben Sie eine Jordanform von C an.

    (b) Zu F gebe es ein $x \in V$, sodass $(x, F(x), \ldots, F^{n-1}(x))$ eine Basis von V ist. Zeigen Sie: $m_F = (-1)^n p_F$.

    (c) Für einen Endomorphismus $F : V \to V$ sei $m_F = (-1)^n p_F$. Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in V$, sodass $(x, F(x), \ldots, F^{n-1}(x))$ eine Basis von V ist.
    Hinweis. Wie würde die darstellende Matrix bezüglich dieser Basis aussehen? Was wissen wir schon über die Jordanform einer solchen Matrix?

100. Geben Sie eine Schur-Zerlegung von

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 64 & 5 & 46 \\ 32 & -20 & 14 \\ -62 & 14 & -35 \end{pmatrix}$$

an, in der die Diagonalelemente aufsteigend sortiert sind.

101. Geben Sie eine unitäre Matrix U an, sodass die U^*AU eine untere Dreiecksmatrix ist, wobei

$$A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 299 & -276 & 120 \\ 151 & -162 & 96 \\ 78 & -219 & 157 \end{pmatrix}$$

ist.

102. (a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

normal ist.

    (b) Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht normal ist.

103. Zeigen Sie, dass die 2-Norm einer normalen Matrix gleich dem Betrag des betragsgrößten Eigenwert ist (und achten Sie darauf, nur bereits in der Vorlesung Bewiesenes zu verwenden).

104. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^t$ und der maximale Eigenwert von A sei positiv. Lösen Sie folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere } \frac{1}{\langle x, x\rangle} \text{ unter der Nebenbedingung } \langle x, Ax\rangle = 1.$$

105. Bestimmen Sie (ohne Verwendung der Differentialrechnung) den kürzesten (euklidschen) Abstand eines Punktes auf der durch die Gleichung $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$ definierten Ellipse vom Ursprung.

106. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und

$$\mathcal{R}_n^0 = \{R \in K^{n\times n} \mid R \text{ obere Dreiecksmatrix, alle Diagonalelemente } = 0\}.$$

Seien $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}_n^0$. Zeigen Sie: $R_1 \cdot R_2 \ldots R_n = 0$.
Hinweis. Rechnungen werden eventuell kürzer, wenn man $W_k = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ für $0 \leq k \leq n$ betrachtet.

107. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch (d.h., $A^* = A$). Zeigen Sie, dass $I + iA$ invertierbar ist.

108. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch (also $A^t = -A$). Zeigen Sie, dass $I + A$ invertierbar ist und $T := (I - A)(I + A)^{-1}$ orthogonal ist. (T heißt die *Cayley-Transformation* von A.)

109. Gibt es eine reelle normale $n \times n$-Matrix, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt und die nicht symmetrisch ist? Beispiel oder Beweis der Nicht-Existenz.

110. (a) Zeigen Sie: Alle Eigenwerte einer unitären Matrix haben den Betrag 1.
(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Drehmatrix. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A (über $\mathbb{C}$) in Abhängigkeit vom Drehwinkel.

111. Geben Sie eine unitäre Diagonalisierung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

an, soferne eine solche existiert.

112. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die reellen und $\lambda_{s+1}, \overline{\lambda_{s+1}}, \ldots, \lambda_{s+t}, \overline{\lambda_{s+t}}$ die nicht-reellen Eigenwerte von A. Sei z_j ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j und $(z_1, \ldots, z_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Für die nicht-reellen Eigenvektoren schreiben wir $z_j = x_j + iy_j$ für passende reelle Vektoren x_j und y_j.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = (z_1, \ldots, z_s, x_{s+1}, y_{s+1}, \ldots, x_{s+t}, y_{s+t})$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

   (b) Wie sieht die Matrixdarstellung von $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto A \cdot x$ bezüglich der Basis B aus?

113. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $Q^tAQ = R$ gibt, wobei

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \ldots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & R_{kk} \end{pmatrix}$$

und R_{jj} Blöcke der Größe entweder 1×1 oder 2×2 sind. Ferner besitzen die 2×2-Blöcke R_{ii} jeweils ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte. Die R_{ij} für $i \neq j$ sind 1×1, 1×2, 2×1 oder 2×2-Blöcke.

114. Bestimmen Sie eine Zerlegung

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonal und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

115. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

116. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^* = A$. Zeigen Sie: Ist A positiv semidefinit und gilt $a_{ii} = 0$, dann sind alle Einträge in Zeile und Spalte i gleich 0.

117. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit $\det(A^{(k)}) > 0$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ (wobei mit $A^{(k)}$ die linke obere $k\times k$-Teilmatrix von A bezeichnet wird). Zeigen Sie unter Verwendung des Schachtelungssatzes für symmetrische Matrizen, dass A positiv definit ist (ohne Cholesky-Zerlegung zu verwenden).

118. Geben Sie jeweils eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ an, sodass

    (a) alle Hauptminoren von $A \geq 0$ sind und A positiv semidefinit ist,

    (b) alle Hauptminoren von $A \geq 0$ sind und A negativ semidefinit ist,

    (c) alle Hauptminoren von $A \geq 0$ sind und A indefinit ist.

119. Wahr oder falsch? Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

    (a) Wenn $\det(A^{(k)}) > 0$ für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $\det(A) \geq 0$, dann ist A positiv semidefinit.

    (b) Wenn es $k \neq \ell \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $\det(A^{(k)}) > 0$ und $\det(A^{(\ell)}) < 0$, so ist A indefinit.

    (c) Wenn es ein $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $\det(A^{(k)}) < 0$, so ist A nicht positiv semidefinit.

    (d) Wenn es ein ungerades $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $\det(A^{(k)}) < 0$, so ist A nicht negativ semidefinit.

120. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine reguläre symmetrische Matrix, $c \in \mathbb{R}^2$ und $f \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^t Ax + 2c^t x + f = 0\}$$

eine Ellipse oder eine Hyperbel mit Mittelpunkt $-A^{-1}c$ (oder einpunktig (welcher Punkt?) oder leer) ist.

121. Wir betrachten den Drehkegel im $\mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Geraden $y = 2x$ (in der xy-Ebene) um die x-Achse entsteht. Bestimmen Sie den Kegelschnitt, der durch Schnitt dieses Drehkegels mit der Ebene $x+2y+2z = 1$ entsteht und bringen Sie diesen durch Drehung und Translation auf Normalform und interpretieren Sie das Ergebnis und die vorgenommenen Transformationen geometrisch (Mittelpunkt, Rotationswinkel, Halbachsenlängen, Scheitel, Brennpunkte, ggf. Asymptoten).

122. Geben Sie explizit Ebenen im $\mathbb{R}^3$ an, sodass deren Schnitt mit dem Drehkegel $x^2 + z^2 = 2y^2$

(a) eine Gerade (doppelt),

(b) die Vereinigung zweier nicht-paralleler Geraden,

(c) einen Punkt,

(d) einen Kreis mit Radius 23

ergibt.

123. Berechnen Sie (von Hand) die Singulärwertzerlegung der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

124. Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -8 & -8 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

125. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand (im Sinne der 2-Norm) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

von einer Matrix vom Rang 2.

126. Wie lässt sich die Singulärwertzerlegung einer

(a) selbstadjungierten

(b) positiv definiten

Matrix A aus ihrer Eigenwertzerlegung ($A = UDU^*$) ableiten?