

1. (a) Berechnen Sie das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2010 \\ -2000 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- (b) Zeigen Sie: Die Elemente $a, b \in K^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $a \times b = 0$.

2. (a) Sei $u + W$ eine Ebene im K^3 mit $W = \text{span}\{a, b\}$. Setze

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = a \times b.$$

Zeigen Sie, dass es dann ein $d \in K$ gibt, sodass

$$u + W = \{(x, y, z)^t \in K^3 \mid c_1x + c_2y + c_3z = d\},$$

wobei Sie so wenig wie irgendwie möglich rechnen sollen. (Hinweis: Lineare Algebra 1, Aufgabe 93.) Da K ein beliebiger Körper ist, kann nicht über Orthogonalität argumentiert werden.

- (b) Geben Sie eine Verallgemeinerung des Kreuzprodukts auf Dimension $n \geq 2$ an, wo $(n-1)$ Vektoren zu einem Vektor „multipliziert“ werden und für Hyperebenen (also affine $(n-1)$ -dimensionale Teilräume) im Wesentlichen dieselben Resultate wie oben gelten. Wieder sollen große Determinanten vorkommen.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x, y, z) \in V \mid 2x - y + z = 0\} \subseteq V$.

- (a) Bestimmen Sie so genau als möglich (d.h. durch Angabe aller äquivalenten Elemente) die Äquivalenzklassen bezüglich U von $(0, 0, 0)$ und von $(1, 0, -1)$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch im Zusammenhang mit V und U .

- (b) Bestimmen Sie $\dim(V/U)$.

- (c) Geben Sie einen Isomorphismus von \mathbb{R}^n nach V/U für ein passendes n an.

- (d) Geben Sie ein Repräsentantensystem an.

4. Sei $V = \mathcal{C}[0, 1]$ (also der Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen reellwertigen Funktionen) und sei $U = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(1) = 0\} \leq V$.

- (a) Seien $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$. Bestimmen Sie $f + U$ und $g + U$.

- (b) Bestimmen Sie $\dim(V/U)$.

- (c) Geben Sie einen Isomorphismus von \mathbb{R}^n nach V/U für ein passendes n an.

- (d) Geben Sie ein Repräsentantensystem an.

5. Richtig oder falsch? Sei U ein Untervektorraum von V .

- (a) Der Quotientenraum V/U ist ein Unterraum von V .

- (b) Der Quotientenraum V/U ist ein Vektorraum.

- (c) Der Quotientenraum V/U ist eine Äquivalenzklasse von U .

- (d) Der Quotientenraum V/U ist eine Menge von Äquivalenzklassen.

- (e) Aus $v + U = U$ folgt $v = 0$, weil $0 + U = U$.

- (f) Aus $v + U = U$ folgt $v = 0$, weil $v + U = 0 + U$.

- (g) Aus $v + U = U$ folgt $v = 0$, durch Addition von $-U$.

- (h) Aus $v + U = U$ folgt $v \in U$, weil $0 \in U$.