

6. Sei  $U$  ein  $m$ -dimensionaler Unterraum eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  (über einem Körper  $K$ ). Sei  $(b_1, \dots, b_m)$  eine Basis von  $U$ . Diese können wir zu einer Basis  $(b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n)$  von  $V$  ergänzen. Wir betrachten nun den Faktorraum  $V/U$ . Zeigen Sie, dass  $(b_{m+1} + U, \dots, b_n + U)$  eine Basis von  $V/U$  ist.
7. Sei  $V = \mathbb{R}^4$  und seien  $u = (1, 0, 1, -1)^t$ ,  $v = (1, -1, 2, 0)^t$  und  $w = (1, 1, 0, -1)^t$ . Wir setzen dann  $U = \text{span}\{u, v\}$  und  $W = \text{span}\{w\}$ . Bestimme eine Basis von  $U \cap W$ ,  $U + W$  und den Faktorräumen  $(U + W)/(U \cap W)$  bzw.  $V/(U + W)$ .
8. Sei  $V = \mathbb{Q}^4$ . Als Basis von  $V$  wählen wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die dazu duale Basis des Dualraums  $V^*$ .

9. Sei  $V = \mathbb{Q}^3$ . Von der Basis  $(v_1, v_2, v_3)$  von  $V$  ist nur die dazu duale Basis  $(f_1, f_2, f_3)$  des Dualraums  $V^*$  bekannt, wobei

$$\begin{aligned} f_1 &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - x_2, \\ f_2 &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_3, \\ f_3 &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie  $(v_1, v_2, v_3)$ .

10. Seien  $V$  und  $W$  zwei endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume mit  $\dim V = n$  und  $\dim W = m$ ,  $A$  eine Basis von  $V$  und  $B$  eine Basis von  $W$ . Den Vektorraum der linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}(V, W)$ . Für ein  $F \in \text{Hom}(V, W)$  sei  $\mathcal{M}(F)$  die Matrixdarstellung von  $F$  bezüglich der Basen  $A$  und  $B$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{M}$  ein Vektorraumisomorphismus von  $\text{Hom}(V, W)$  nach  $K^{m \times n}$  ist.
11. Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$  mit  $\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$  ein normierter Raum ist. Es sind die Normaxiome zu überprüfen, und zwar genauer als in der Vorlesung, wo dies nur durch Händefuchteln geklärt wurde.
12. Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$  mit  $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  ein normierter Raum ist. Wieder mit genauem Beweis.
13. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Finden Sie positive Konstanten  $c_1, c_2$  (abhängig von  $n$ ), sodass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq c_2 \|x\|_1$$

gilt. Sie sollen also den Normäquivalenzsatz für dieses Paar von Normen direkt überprüfen.