

14. Sei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Berechnen Sie $\|D\|_1$, $\|D\|_2$, $\|D\|_\infty$, $\|D\|_F$.
15. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen eines Vektorraums V ist. (Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c_1 und c_2 gibt, sodass $c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|$ für alle $x \in V$ gilt.)
16. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$

$$\|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

gilt.

Hinweis. Vorlesung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

17. Zeigen Sie: Für eine induzierte Operatornorm gilt:

- (a) $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Ist A invertierbar, so gilt $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$.

18. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

(Spaltensummennorm) gilt.

19. Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.
20. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt, dass $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}$.
21. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und T ein Automorphismus von V . Zeigen Sie, dass dann durch

$$\|x\|_T := \|T(x)\|$$

eine weitere Vektornorm auf V definiert ist.

- (b) Geben Sie (unter der Voraussetzung, dass $\dim V < \infty$) positive Konstanten c_1 und c_2 in Abhängigkeit von $\|T\|$ und $\|T^{-1}\|$ an, sodass

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|_T \leq c_2 \|x\|$$

für alle $x \in V$ gilt.

22. Bestimmen Sie die Konditionszahl bezüglich der ∞ -Norm der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

wobei c und d die mit einem Lineal gemessenen Längen der Strecken

$$\begin{array}{cc} \text{---} c \text{---} & \text{---} d \text{---} \\ | & | \end{array}$$

sind. Bestimmen Sie x und y . Geben Sie an, um wieviel Prozent Ihre Werte x bzw. y durch Messfehler höchstens beeinflusst sind. **Begründen Sie jeden Schritt ausführlich!**