24. Zeigen Sie, dass für jede quadratische Matrix A und jede Vektornorm $\|\cdot\|$ die entsprechende Konditionszahl $\kappa(A) \geq 1$ ist.

25. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Gibt es immer Vektoren $b \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta b \in \mathbb{C}^n$, sodass für die Lösungen $x \in \mathbb{C}^n$ und $x + \Delta x \in \mathbb{C}^n$ der linearen Gleichungssysteme
$$Ax = b \qquad A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$
gilt, dass
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \ ?$$
Ist also die Sensitivitätsabschätzung für die Störung der rechten Seite scharf?

(b) Konkrete Fassung von (a):
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty.$$
Bestimmen Sie konkret b, Δb, x, Δx wie im Teil (a) gefordert.

26. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, b, Δb, x, $\Delta x \in \mathbb{C}^n$ mit $Ax = b$ und $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Zeigen Sie:
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \ .$$

27. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und B eine $(r \times s)$-Teilmatrix von A, die durch Auswahl von r Zeilen und s Spalten von A entsteht.

(a) Geben Sie (möglichst einfache) Matrizen $S \in \mathbb{C}^{r\times m}$ und $T \in \mathbb{C}^{n\times s}$ an, sodass $B = SAT$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle p mit $1 \leq p \leq \infty$ die Abschätzung $\|B\|_p \leq \|A\|_p$ gilt.

28. Sei
$$A = \begin{pmatrix} \frac{68}{5} & \frac{24}{5} \\ \frac{24}{5} & \frac{82}{5} \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\|A\|_2$, indem Sie die entsprechende Extremwertaufgabe durch Differentialrechnung lösen.