29. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^2$ durch $\langle (x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t \rangle := x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_2$ ein Skalarprodukt definiert wird, das nicht positiv definit ist. Geben Sie einen Vektor x an, sodass $\langle x, x \rangle < 0$.

30. Berechnen Sie $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u - v\|$ für $u = (2 - i, 3 + 2i)^t$ und $v = (3 - 2i, 2 + i)^t$.

31. Das Methanmolekül CH_4 ist so angeordnet, dass das Kohlenstoffatom im Mittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders ist, an dessen Ecken sich die Wasserstoffatome befinden. Wir nehmen als Eckpunkte des Tetraeders die Punkte $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, und $(0, 1, 1)$ [Beweisen Sie, dass alle Kanten gleich lang sind!] an. Berechnen Sie den Winkel zwischen zwei der Strahlen vom Schwerpunkt zu den Ecken des Tetraeders.

32. Sei $v_1, \ldots, v_m$ ein Orthogonalsystem in einem unitären Raum. Zeigen Sie, dass
$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m\|^2 = |\alpha_1|^2 \|v_1\|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 \|v_m\|^2 .$$

33. Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und a, b, c, $d \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie die Lagrangesche Identität
$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle.$$
Folgern Sie daraus
$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$$
und
$$\|a \times b\| = \|a\| \, \|b\| \sin \theta,$$
wobei θ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Letztere Formel wurde in der Vorlesung über die geometrische Deutung der Determinante als orientiertes Volumen bewiesen, ist aber hier unabhängig davon herzuleiten.

34. Sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ der Vektorraum der quadratischen $(n \times n)$-Matrizen. Definiere $\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(A \cdot B)$.
    (a) Zeigen Sie: Durch obige Funktion wird ein Skalarprodukt definiert.
    (b) Zeigen Sie: Wenn das Skalarprodukt auf dem Vektorraum V' der symmetrischen $n \times n$-Matrizen betrachtet wird, so ist es positiv definit.
    (c) Man gebe ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\langle A, A \rangle < 0$ an.
    (d) Man zeige, dass durch $\langle A, B \rangle' := \operatorname{tr}(A^t \cdot B)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf V definiert wird.

35. Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein reeller Innerer-Produkt-Raum, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrixdarstellung von $\langle \cdot , \cdot \rangle$ bezüglich B.
    (a) Wir betrachten die neue Basis $B' = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + \alpha v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, wobei $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}$; es wird also v_j durch $v_j + \alpha v_i$ ersetzt. Wie sieht dann die Matrixdarstellung von $\langle \cdot , \cdot \rangle$ bezüglich B' aus?
    (b) Geben Sie (unter Verwendung von obiger Beobachtung) ein Verfahren an, um eine neue Basis C zu erhalten, bezüglich der $\langle \cdot , \cdot \rangle$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.
    (c) Wenden Sie dieses Verfahren auf das Innere Produkt $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ mit
    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
    an.
    (d) Dasselbe für
    $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$