36. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
    (a) Es gibt ein degeneriertes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $v \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$.
    (b) Es gibt ein nicht-degeneriertes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $v \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$.
    (c) Es gibt ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $v \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$.
37. Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $q : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form. Man zeige, dass $q$ homogen vom Grad 2 ist: für alle $x \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$.
38. Welche der folgenden Funktionen ist eine quadratische Form? Geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Euklid'schen Raum und sein Skalarprodukt an.
    (a) $f_1(x, y, z) := x^3 + \ln(y) + z^2$,
    (b) $f_2(x, y, z) := 5x^2 + 28xy + 14y^2 + 32xz + 14yz + 4z^2$,
    (c) $f_3(x, y) := 2x^2 + 13xy + y^2 + 2x + 4y + 27$.
39. Zeigen oder widerlegen Sie:
    (a) Eine positiv definite Matrix kann keine negative Einträge haben.
    (b) Wenn $A$ und $B$ symmetrisch sind, dann ist auch $AB$ symmetrisch.
    (c) Wenn $A$ und $B$ positiv definit sind, dann ist auch $AB$ positiv definit.
40. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & y \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix}$$
    positiv definit?
41. Wir sagen, dass in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ die *Parallelogrammgleichung* erfüllt ist, wenn für alle $x$, $y \in V$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
    gilt.
    (a) Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein reeller Innerer-Produkt-Raum. Zeigen Sie, dass die durch dieses innere Produkt induzierte Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt.
    (b) Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, in dem die Parallelogramm-Gleichung erfüllt ist, und definiere $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ durch
$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$
    Wodurch ist diese Definition motiviert? Zeigen Sie, dass dann für alle $x$, $y$, $z \in V$ die Beziehung
$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$
    gilt.
    (c) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von 41b, dass für alle $x$, $y \in V$ und alle *rationalen* $\alpha$ auch
$$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$
    gilt.
    (d) Gleich wie 41c, aber jetzt für *reelles* $\alpha$. Zeigen Sie auch, dass $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ tatsächlich ein positiv definites Skalarprodukt ist. Was ist die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm?
    (e) Geben Sie einen reellen normierten Raum an, in dem die Parallelogrammgleichung nicht gilt.