42. Betrachte $V := \mathbb{R}^2$ mit dem inneren Produkt $\langle u, v \rangle_M := u^t M v$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $A(x, y) := (x-y, 2x+y)$. Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung zu A bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

43. Sei $\mathbb{P}_1$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 1. Bestimmen Sie die zu $F : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, $F(a + bx) := 5a + (2a + 3b)x$ adjungierte Abbildung bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle := \int_0^1 6f(x)g(x)\,dx$.

44. Sei V ein unitärer (Euklidscher) Raum, $f : V \to V$ linear und $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. M sei die Matrixdarstellung von f bezüglich B. Zeigen Sie, dass dann die Matrixdarstellung der adjungierten linearen Abbildung f^* durch M^* gegeben ist.

45. Betrachte $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(AB)$, den Untervektorraum U der symmetrischen und den Untervektorraum W der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass $W = U^\perp$.

46. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Raum, W ein Unterraum, A eine lineare Abbildung auf V und A^* die zugehörige adjungierte Abbildung. Zeigen Sie: Aus $A(W) \subseteq W$ folgt $A^*(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d. h. falls W bezüglich A invariant ist, dann ist $W^\perp$ bezüglich A^* invariant.

47. Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ und $D : V \to V$, $D(f) = f'$ der Differentialoperator, $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.
    (a) Bestimmen Sie die zu D adjungierte Abbildung auf dem Unterraum der Polynome mit $f(0) = f(1) = 0$.
    (b) Zeigen Sie: D besitzt keine adjungierte Abbildung.
    (c) Bestimmen Sie die zu D adjungierte Abbildung auf dem Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 1.

48. Sei $W := \mathrm{span}\{(1, 2, 1, 2)^t, (-2, 1, -2, 1)^t, (1, 1, 1, -2)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$ und $v = (1, 2, 3, 4)^t$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von v auf W.

49. Projizieren Sie den Vektor $(1, 2, 3, 4)^t$ auf den durch
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$
gegebenen Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

50. Sei V ein Euklidscher Raum und W ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Definiere $T : V \to V$ durch $T(v) := w - w'$, wobei $v = w + w'$ die Darstellung von v bezüglich der direkten Summe $V = W \oplus W^\perp$ ist. Zeigen Sie: T ist selbstadjungiert und unitär.

51. Geben Sie einen Vektorraum V an, für den die unitäre Gruppe $U(V) = \{F : V \to V \text{ unitär}\}$ *nicht* kommutativ ist.