

52. Projizieren Sie den Vektor  $(10, 5, 10, 15, 2, 0, 16, -5)^t$  auf den durch

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 0, \\x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + 2x_7 - 2x_8 &= 0\end{aligned}$$

gegebenen Teilraum des  $\mathbb{R}^8$ .

53. Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und der Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Für  $a, b, c \in V$  gelte  $\|a\| = \|b\| = \|c\| = \|a - b\| = \|b - c\| = \|c - a\| = 1$ . Zeigen Sie, dass  $a, b, c$  linear unabhängig sind.

54. Wir betrachten den Raum  $\mathcal{C}[-1, 1]$  der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  versehen mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ . Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des Teilraums, der von den Funktionen  $x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2$  aufgespannt wird.

55. Bestimmen Sie (ohne Differentiation) jenes lineare Polynom  $p(x)$ , welches

$$\int_0^1 (p(x) - x^3)^2 dx$$

minimiert.

56. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem positiv definiten Skalarprodukt. Sei  $\{v_1, \dots, v_m\}$  ein Orthonormalsystem. Für alle  $v \in V$  gelte

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i \rangle^2.$$

Zeigen Sie, dass dann  $\{v_1, \dots, v_m\}$  eine Basis von  $V$  ist.

57. Sei  $V$  ein Innerer-Produkt-Raum mit positiv definitem inneren Produkt,  $W$  ein endlichdimensionaler Teilraum von  $V$  mit Orthogonalbasis  $\{w^1, \dots, w^n\}$ . Leiten Sie *direkt* aus der Definition der Projektion, d.h. ohne Verwendung von adjungierten Abbildungen, allgemeinen Formeln für die Projektion etc., die Formel

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\langle w^j, x \rangle}{\langle w^j, w^j \rangle} w^j$$

her.

58. Spiegeln Sie den Vektor  $(27, 03, 20, 09)^t \in \mathbb{R}^4$  am Untervektorraum  $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + 2x_4 = 0\}$ .

59. Deuten Sie die durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot x$$

gegebene Abbildung von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$  geometrisch.

60. Sei  $A$  eine unitäre Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass dann alle Diagonalelemente Absolutbetrag 1 haben und daher die Form  $e^{i\theta}$  für ein reelles  $\theta$  haben. Was folgt daraus für reelle orthogonale Diagonalmatrizen?

61. Bestimmen Sie eine  $QR$ -Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$