62. Gegeben sei die untenstehende Drehmatrix in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die dazugehörige Drehachse und den dazugehörigen Drehwinkel.

63. Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

64. Gegeben seien folgende Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 6$:

$$(-3, -7), (-2, -5), (-1, 1), (1, -1), (2, -1), (3, -9).$$

Finden Sie jenes Polynom $p(x)$ von Grad 2, welches die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 6$, im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert, d.h., die Summe $\sum_{i=1}^{6}(p(x_i) - y_i)^2$ minimiert.

65. (a) Bestimmen Sie die Pseudoinverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei A regulär. Beweisen Sie, dass ihre Pseudoinverse gleich der Inversen ist.

66. Ein Fahrzeug wird (mit konstanter Verzögerung) abgebremst. Nach 10, 20, ..., 70 Metern wird die Durchfahrtszeit gemessen:

$s(t)$	10	20	30	40	50	60	70
t	0.37	0.77	1.21	1.70	2.26	2.94	3.86

Berechnen Sie eine Näherung der Startgeschwindigkeit und der Verzögerung sowie die Länge des Bremsweges.

67. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \\ -4 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

68. Welche der folgenden linearen Operatoren sind diagonalisierbar?

(a) $T(f) = f' + f''$ auf dem VR der Polynome vom Grad ≤ 3.

(b) $T(A) = A^t$ auf $K^{2\times 2}$.

69. Sei V der Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen und $D : V \to V$, $D(f) = f'$. Zeigen Sie: $v(t) = \sin(kt)$ und $w(t) = \cos(kt)$ sind Eigenvektoren von D^2. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte?

70. A sei eine relle $n \times n$-Matrix mit geradem n. Zeigen Sie: Wenn $\det(A) < 0$, dann hat A mindestens zwei verschiedene reelle Eigenwerte.