

71. Ist die (100×100) -Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 100 & 100 & 100 & \dots & 100 & 100 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis von Eigenvektoren (und die zugehörigen Eigenwerte) an.

72. Ist die (2010×2010) -Matrix

$$\begin{pmatrix} 2010 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2010 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2010 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2010 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2010 \end{pmatrix} = (1 + 2009\delta_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq 2010 \\ 1 \leq k \leq 2010}}$$

diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis von Eigenvektoren (und die zugehörigen Eigenwerte) an.

73. Sei $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) 0 ist ein Eigenwert der geometrischen Vielfachheit $n - 1$.
- (b) A hat Rang 1.
- (c) Es gibt a und $b \in K^n \setminus \{0\}$, sodass $A = ab^t$.

Geben Sie einen Eigenvektor und einen zugehörigen Eigenwert ungleich 0 von A an, wenn es die Darstellung $A = ab^t$ besitzt.

74. Sei $A \in K^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert der geometrischen Vielfachheit $\rho(\lambda)$ von A . Zeigen Sie, dass es dann auch einen „Linkseigenvektor“ $y \in K^n$ (ungleich 0) gibt, sodass $y^t A = \lambda y^t$. Zeigen Sie weiters, dass die Menge dieser Linkseigenvektoren (vereinigt mit $\{0\}$) einen Untervektorraum der Dimension $\rho(\lambda)$ des K^n bildet.

75. Sei $A \in K^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- (a) Zeigen Sie, dass es dann Matrizen M_1, \dots, M_n vom Rang 1 gibt, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

$$A^k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k M_j$$

gilt.

- (b) Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden, x^1, \dots, x^n die zugehörigen Eigenvektoren und y^1, \dots, y^n die zugehörigen Linkseigenvektoren und die Eigenvektoren derart gewählt sind, dass $(y^j)^t \cdot x^j = 1$ für $1 \leq j \leq n$, so gilt $M_j = x^j \cdot (y^j)^t$.

76. Sei $A \in K^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit n . Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn A eine Diagonalmatrix ist.