77. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 19 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 19 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -14 & 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2010\times 2010}.$$

Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^{2010}$ an, die aus Eigenvektoren von A besteht.

78. Geben Sie die Jordan-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -19 \\ -6 & 15 & 20 \\ 6 & -17 & -22 \end{pmatrix}$$

an. Dabei sind auch die Transformationsmatrizen anzugeben.

79. Finden Sie die Jordanzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_2$ (inklusive der Transformationsmatrizen).

80. Sei V der Vektorraum der Polynome in x mit reellen Koeffizienten und $D : V \to V$, $D(f) = f'$ der Differentialoperator.

    (a) Bestimme alle Eigenwerte von D.

    (b) Sei $\mathbb{P}_n$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. $\mathbb{P}_n$ ist ein D-invarianter Unterraum, sodass wir D als Selbstabbildung von $\mathbb{P}_n$ auffassen können. Ermittle für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Basis B_n, sodass D bzgl. dieser Basis Jordansche Normalform besitzt.

81. $J_r(\lambda)$ steht für einen $(r \times r)$-Jordanblock zum Eigenwert λ.

    (a) Bestimmen Sie

$$\dim \ker(J_5(3) - 3I)^k$$

    für $0 \leq k \leq 10$.

    (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & & \\ & J_2(3) & & & & & & \\ & & J_3(3) & & & & & \\ & & & J_3(3) & & & & \\ & & & & J_5(3) & & & \\ & & & & & J_2(9) & & \\ & & & & & & J_2(9) \end{pmatrix}.$$

    Bestimmen Sie

$$\dim \ker(A - 3I)^k, \qquad \dim \ker(A - 9I)^k, \qquad \dim \ker(A - 2I)^k$$

    für $0 \leq k \leq 10$.