82. Finden Sie die Jordanzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_3$ (inklusive der Transformationsmatrizen), wobei $\mathbb{F}_3 = \{-1, 0, 1\}$ mit

$+$	-1	0	1
-1	1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	-1

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

83. $J_r(\lambda)$ steht für einen $(r \times r)$-Jordanblock zum Eigenwert λ.

(a) Bestimmen Sie

$$\dim\ker(J_4(2) - 2I)^k$$

für $0 \leq k \leq 7$.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & & & & \\ & J_4(1) & & & & & \\ & & J_4(1) & & & & \\ & & & J_5(1) & & & \\ & & & & J_5(1) & & \\ & & & & & J_1(2) & \\ & & & & & & J_3(2) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\dim\ker(A - 1I)^k, \qquad \dim\ker(A - 9I)^k, \qquad \dim\ker(A - 2I)^k$$

für $0 \leq k \leq 10$.

(c) Sei $F : K^{19} \to K^{19}$ ein Endomorphismus, von dem bekannt sei, dass

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\dim\ker(F + 2I)^k$	4	8	12	14	16	16	16	16	16
$\dim\ker(F + 3I)^k$	2	3	3	3	3	3	3	3	3
$\dim\ker(F + 4I)^k$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.

Bestimmen Sie eine Jordanform von F (ohne Transformationsmatrizen). Erklären Sie ausführlich, wie Sie zu Ihrem Ergebnis kommen.

84. Untersuchen Sie das Verhalten des Hühner-Füchse-Modells aus der Vorlesung,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 0.6F_n + 0.5H_n, \\ H_{n+1} &= -kF_n + 1.2H_n, \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von k. Für die Startwerte $F_0 = 100$ und $H_0 = 1000$ soll (in Abhängigkeit von k) eine explizite Formel für F_n und H_n angegeben werden, wobei jeweils der asymptotisch „dominante" Term zu kennzeichnen ist. Für welche Werte von k sind die Werte von F_n und H_n beschränkt, unbeschränkt, eine Nullfolge? Geben Sie für den Wert $k = 1/10$ Startwerte F_0, H_0 an, sodass die beide Folgen konvergieren bzw. divergieren.

85. Sei $w = \frac{1}{\sqrt{2005}}(1, 1, \ldots, 1, 1)^t \in \mathbb{R}^{2005}$ und $P_w := I - w \cdot w^t$. Deuten Sie P_w geometrisch und bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von P_w.