89. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & -1 & -7 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & -3 & -8 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 20 & 1 & 12 & -14 & -23 & 11 & 3 & -6 & 16 \\ -24 & -1 & -13 & 14 & 25 & -11 & -3 & 6 & -18 \\ 13 & 1 & 8 & -10 & -16 & 9 & 2 & -5 & 11 \\ -17 & -1 & -8 & 9 & 17 & -7 & -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

(`http://www.math.tugraz.at/~cheub/lv/LinAlg2/Uebungsbeispiele/matrix531.txt`)

(a) Bestimmen Sie eine Jordanmatrix $J$, die ähnlich zu $A$ ist.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $A$.

(c) Bestimmen Sie eine Jordanzerlegung von $A$, also eine reguläre Matrix $T$, sodass $T^{-1}AT$ eine Jordanmatrix ist.

Für Matrizenmultiplikationen, Berechnung von Determinanten, Inversion von Matrizen, Bestimmen von Rängen und Lösung von linearen Gleichungssystemen kann ein Computeralgebrasystem benutzt werden.

90. Sei $A = TJT^{-1}$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Jordanzerlegung von $A^t$ an (inkl. Transformationsmatrizen).

91. Wir betrachten eine rekursiv gegebene Folge

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ H_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A$ ist unbekannt, wohl sind aber die ersten Terme der Folge bekannt. Bestimmen Sie alle möglichen Matrizen $A$.

(a)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 2 | 8 | 28 | 92 | 292 |
| $H_n$ | 6 | 20 | 64 | 200 | 616 |

(b)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 2 | 6 | 18 | 54 | 162 |
| $H_n$ | 4 | 12 | 36 | 108 | 324 |

92. Zeigen Sie (möglichst ohne aufwändige Rechnung), dass für

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

und jeden beliebigen Vektor $x$ die Folge $A^n x$ gegen den Nullvektor konvergiert.