93. Für welche Vektoren $z^0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert die rekursiv durch

$$z^{k+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} z^k, \qquad k \geq 0,$$

gegebene Folge?

94. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Man zeige, dass für die durch diese Norm induzierte Operatornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ und jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt, dass

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Spektralradius ($\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$) keine Matrixnorm ist.

95. Lösen Sie die folgenden linearen Rekursionen:

(a) $x_{n+2} = 16x_{n+1} - 60x_n$ für $n \geq 0$ und $x_0 = 22$, $x_1 = 212$.

(b) $x_{n+4} = 25x_{n+3} - 225x_{n+2} + 875x_{n+1} - 1250x_n$ für $n \geq 0$ und $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (3, 150, 2450, 26000)$

(c) $x_{n+3} - 9x_{n+2} + 24x_{n+1} - 20x_n = -54(-1)^n - 72 \cdot 2^n$ für $n \geq 0$ und $(x_0, x_1, x_2) = (3, 16, 94)$.

96. Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Cayley-Hamilton an diesem Beispiel.

(b) Stellen Sie A^3 und A^4 je als Linearkombination von $A^0 = I$, A, A^2 dar.

97. Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass

$$A^2 - 2A + I = 0$$

und höchstens 4 Einträge von A gleich 0 sind.