

98. Lösen Sie die lineare Rekursion

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 12n3^n \text{ für } n \geq 0 \text{ und } (x_0, x_1) = (15, 18).$$

99. Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus,  $p_F$  sein charakteristisches Polynom und  $m_F$  sein Minimalpolynom. Das charakteristische Polynom von  $F$  zerfalle über  $K$  in Linearfaktoren.

- (a) Zu  $F$  gebe es ein  $x \in V$ , sodass  $(x, F(x), \dots, F^{n-1}(x))$  eine Basis von  $V$  ist und  $C \in K^{n \times n}$  sei die Matrix von  $F$  bezüglich dieser Basis. Drücken Sie die Koeffizienten von  $p_F$  durch die Matrixelemente von  $C$  aus und umgekehrt. Geben Sie eine Jordanform von  $C$  an.
- (b) Zu  $F$  gebe es ein  $x \in V$ , sodass  $(x, F(x), \dots, F^{n-1}(x))$  eine Basis von  $V$  ist. Zeigen Sie:  $m_F = (-1)^n p_F$ .
- (c) Für einen Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  sei  $m_F = (-1)^n p_F$ . Zeigen Sie: Es gibt ein  $x \in V$ , sodass  $(x, F(x), \dots, F^{n-1}(x))$  eine Basis von  $V$  ist.  
*Hinweis.* Wie würde die darstellende Matrix bezüglich dieser Basis aussehen? Was wissen wir schon über die Jordanform einer solchen Matrix?

100. Geben Sie eine Schur-Zerlegung von

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 64 & 5 & 46 \\ 32 & -20 & 14 \\ -62 & 14 & -35 \end{pmatrix}$$

an, in der die Diagonalelemente aufsteigend sortiert sind.

101. Geben Sie eine unitäre Matrix  $U$  an, sodass die  $U^*AU$  eine untere Dreiecksmatrix ist, wobei

$$A = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 299 & -276 & 120 \\ 151 & -162 & 96 \\ 78 & -219 & 157 \end{pmatrix}$$

ist.

102. (a) Bestimmen Sie alle  $a \in \mathbb{R}$ , sodass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

normal ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht normal ist.

103. Zeigen Sie, dass die 2-Norm einer normalen Matrix gleich dem Betrag des betragsgrößten Eigenwert ist (und achten Sie darauf, nur bereits in der Vorlesung Bewiesenes zu verwenden).

104. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A = A^t$  und der maximale Eigenwert von  $A$  sei positiv. Lösen Sie folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere } \frac{1}{\langle x, x \rangle} \text{ unter der Nebenbedingung } \langle x, Ax \rangle = 1.$$