

105. Bestimmen Sie (ohne Verwendung der Differentialrechnung) den kürzesten (euklidischen) Abstand eines Punktes auf der durch die Gleichung $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$ definierten Ellipse vom Ursprung.

106. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und

$$\mathcal{R}_n^0 = \{R \in K^{n \times n} \mid R \text{ obere Dreiecksmatrix, alle Diagonalelemente} = 0\}.$$

Seien $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{R}_n^0$. Zeigen Sie: $R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_n = 0$.

Hinweis. Rechnungen werden eventuell kürzer, wenn man $W_k = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ für $0 \leq k \leq n$ betrachtet.

107. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch (d.h., $A^* = A$). Zeigen Sie, dass $I + iA$ invertierbar ist.

108. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch (also $A^t = -A$). Zeigen Sie, dass $I + A$ invertierbar ist und $T := (I - A)(I + A)^{-1}$ orthogonal ist. (T heißt die *Cayley-Transformation* von A .)

109. Gibt es eine reelle normale $n \times n$ -Matrix, deren charakteristisches Polynom über \mathbb{R} in Linearfaktoren zerfällt und die nicht symmetrisch ist? Beispiel oder Beweis der Nicht-Existenz.

110. (a) Zeigen Sie: Alle Eigenwerte einer unitären Matrix haben den Betrag 1.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Drehmatrix. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A (über \mathbb{C}) in Abhängigkeit vom Drehwinkel.