

111. Geben Sie eine unitäre Diagonalisierung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

an, sofern eine solche existiert.

112. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ über \mathbb{C} diagonalisierbar, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die reellen und $\lambda_{s+1}, \overline{\lambda_{s+1}}, \dots, \lambda_{s+t}, \overline{\lambda_{s+t}}$ die nicht-reellen Eigenwerte von A . Sei z_j ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j und (z_1, \dots, z_n) eine Basis von \mathbb{C}^n . Für die nicht-reellen Eigenvektoren schreiben wir $z_j = x_j + iy_j$ für passende reelle Vektoren x_j und y_j .

(a) Zeigen Sie, dass $B = (z_1, \dots, z_s, x_{s+1}, y_{s+1}, \dots, x_{s+t}, y_{s+t})$ eine Basis von \mathbb{R}^n ist.

(b) Wie sieht die Matrixdarstellung von $F_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto A \cdot x$ bezüglich der Basis B aus?

113. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $Q^t A Q = R$ gibt, wobei

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{kk} \end{pmatrix}$$

und R_{jj} Blöcke der Größe entweder 1×1 oder 2×2 sind. Ferner besitzen die 2×2 -Blöcke R_{ii} jeweils ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte. Die R_{ij} für $i \neq j$ sind 1×1 , 1×2 , 2×1 oder 2×2 -Blöcke.

114. Bestimmen Sie eine Zerlegung

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ orthogonal und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

115. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$