

120. Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine reguläre symmetrische Matrix,  $c \in \mathbb{R}^2$  und  $f \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^t A x + 2c^t x + f = 0\}$$

eine Ellipse oder eine Hyperbel mit Mittelpunkt  $-A^{-1}c$  (oder einpunktig (welcher Punkt?) oder leer) ist.

121. Wir betrachten den Drehkegel im  $\mathbb{R}^3$ , der durch Rotation der Geraden  $y = 2x$  (in der  $xy$ -Ebene) um die  $x$ -Achse entsteht. Bestimmen Sie den Kegelschnitt, der durch Schnitt dieses Drehkegels mit der Ebene  $x + 2y + 2z = 1$  entsteht und bringen Sie diesen durch Drehung und Translation auf Normalform und interpretieren Sie das Ergebnis und die vorgenommenen Transformationen geometrisch (Mittelpunkt, Rotationswinkel, Halbachsenlängen, Scheitel, Brennpunkte, ggf. Asymptoten).

122. Geben Sie explizit Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  an, sodass deren Schnitt mit dem Drehkegel  $x^2 + z^2 = 2y^2$

- (a) eine Gerade (doppelt),
- (b) die Vereinigung zweier nicht-paralleler Geraden,
- (c) einen Punkt,
- (d) einen Kreis mit Radius 23

ergibt.

123. Berechnen Sie (von Hand) die Singulärwertzerlegung der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

124. Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -8 & -8 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

125. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand (im Sinne der 2-Norm) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

von einer Matrix vom Rang 2.

126. Wie lässt sich die Singulärwertzerlegung einer

- (a) selbstadjungierten
- (b) positiv definiten

Matrix  $A$  aus ihrer Eigenwertzerlegung ( $A = UDU^*$ ) ableiten?