$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} z_n$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = A z_n \quad \Rightarrow \quad z_n = A^n \cdot z_0$$

Wir brauchen also die Jordan-Zerlegung von A

Suche EW/EV von A durch direkten Ansatz. $\lambda \dots$ EW, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix}$ zugehöriger EV.

$$\begin{pmatrix} \lambda\varphi_1 \\ \vdots \\ \lambda\varphi_d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_d\varphi_d \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{d-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_{d-1} = \lambda\varphi_d$$
$$\varphi_{d-2} = \lambda\varphi_{d-1} = \lambda^2\varphi_d$$
$$\Rightarrow \varphi_{d-j} = \lambda^j \varphi_d \quad \text{für } 0 \le j \le d-1$$

1. Gl.: $\lambda\lambda^{d-1}\varphi_d = \lambda\varphi_1 = \sum_{j=1}^d a_j\varphi_j = \sum_{j=1}^d a_j \lambda^{d-j}\varphi_d$

$$\Rightarrow \lambda^d\varphi_d = \left(\sum_{j=1}^d a_j \lambda^{d-j}\right)\varphi_d$$

$\varphi_d = 0$ nicht interessant, weil dann $\varphi = 0$, also kein EV. Also dividiere durch φ_d: $\lambda^d = \sum_{j=1}^d a_j \lambda^{d-j}$

Polynomgl. d-ten Grades für λ „char. Gl." (entspricht char. Poly. von A)

EV: $\begin{pmatrix} \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ alle EW haben geom. Vf. 1.

20.05.2010

$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_d \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Durch Ansatz gesehen:
- Eigenwerte sind Nullstellen von $t^d - a_1t^{d-1} - a_2t^{d-2} - \dots - a_d$
- Eigenvektor zum EW λ $\begin{pmatrix} \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ jedenfalls geom. Vf. 1

Frage: stimmt $t^d - a_1t^{d-1} - \dots - a_d$ wirklich mit char. Poly von A überein?
(Nullstellen stimmen überein, Vielfachheiten unklar)

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} a_1-t & a_2 & \dots & a_d \\ 1 & -t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{1+d} a_d \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -t \\ & & & 1 \end{vmatrix}}_{1} + (-t)\begin{vmatrix} a_1-t & a_2 & \dots & a_{d-1} \\ 1 & -t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^d\left(-a_d - t\underbrace{(-1)^d\begin{vmatrix} a_1-t & a_2 & \dots & a_{d-1} \\ 1 & -t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{vmatrix}}_{(-1)^d a_{d-1} - t \dots}\right) = (-1)^d(-a_d - a_{d-1}t - \dots - a_2t^{d-2} - t(a_1 - t)t^{d-1})$$

$$= (-1)^d(-a_d - a_{d-1}t - \dots - a_2t^{d-2} - a_1t^{d-1} + t^d)$$

Also: Faktorisiere $t^d - a_1t^{d-1} - \dots - a_{d-1}t - a_d = (t-\lambda_1)^{\mu_1} \dots (t-\lambda_k)^{\mu_k}$

Jordanzerlegung: $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mu_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+d-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = z_n = A^n z_0 = T \begin{pmatrix} J_{\mu_1}(\lambda_1)^{n} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mu_k}(\lambda_k)^{n} \end{pmatrix} T^{-1} z_0 \qquad J_{\mu_1}(\lambda_1)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & n\lambda_1^{n-1} \\ & & & \lambda_1^n \end{pmatrix}$$

$$k\frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} = \frac{k}{2\lambda_1^2}\left(n^2\lambda_1^n - n\lambda_1^n\right)$$

Multipliziert man alles aus, erhält man

$$x_n = c_{1,0}\lambda_1^n + c_{1,1}n\lambda_1^n + c_{1,2}n^2\lambda_1^n + \dots + c_{1,\mu_1-1}n^{\mu_1-1}\lambda_1^n + \dots + c_{k,0}\lambda_k^n + c_{k,1}n\lambda_k^n + \dots + c_{k,\mu_k-1}n^{\mu_k-1}\lambda_k^n$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \operatorname{span}\left\{(n^j\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \,\middle|\, \begin{matrix} 1\le i\le k \\ 0\le j\le \mu_i-1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow (n^j\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ 1\le i\le k, \ 0\le j\le\mu_i-1$$

sind daher Erzeugendensystem von ~~W~~ Obermenge von W.
Dieses Erzeugendensystem hat $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = d$ Elemente

Weiters wissen wir, dass $\dim W \ge d$:
Jede der Folgenfestsetzungen $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix} = e_j$ ergibt eine Folge in W, diese Folgen sind l.u.

$\Rightarrow$ Das angegebene Erzeugendensystem ist Basis von W.

Satz 6.6.: Homogene lineare Rekursionen

Sei $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_d \in K$,
$W = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid x_{n+d} = a_1x_{n+d-1} + \dots + a_dx_n\}$
Weiters gelte:
$t^d - a_1t^{d-1} - \dots - a_d = (t-\lambda_1)^{\mu_1} \dots (t-\lambda_k)^{\mu_k}$ für passende Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, Vf. $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{N}$
Dann ist
$(n^j\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $1\le i\le k$, $0\le j\le\mu_i-1$ eine Basis von W.

Bsp. 1: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0 \quad F_1 = 1$

char. Gl.: $t^2 - t - 1 = 0$

$$t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Basis: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\Rightarrow F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ für passende Konstanten A, B

$n=0$: $0 = F_0 = A + B \Rightarrow B = -A$

$n=1$: $1 = F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = A\sqrt{5} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Bsp. 2: $x_{n+3} = 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}$

char. Glg.: $t^3 - 4t^2 + 5t^1 - 2 = 0$

$(t-1)(t^2 - 3t + 2) = 0$

$(t-1)^2(t-2)^1 = (t-1)(t-1)(t-2) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \mu(1) = 2$
$\lambda_2 = 2 \quad \mu(2) = 1$

Basis: $1^n \quad n \cdot 1^n$
2^n

$\Rightarrow x_n = A \cdot 1^n + Bn \cdot 1^n + C 2^n = A + Bn + C2^n$

$n=0$:	$4 = A + C$		
$n=1$:	$9 = A + B + 2C$	$5 = B + C$	$C = 3$
$n=2$:	$17 = A + 2B + 4C$	$8 = B + 2C$	$B = 2$
			$A = 1$

$\Rightarrow x_n = 1 + 2n + 3 \cdot 2^n$

Unterwegs haben wir folgende Tatsachen mitbewiesen:

Korollar 1: $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_d \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ hat char. Poly. $(-1)^d(t^d - a_1 t^{d-1} - \dots - a_0)$ und jeder EW hat geom. Vf. 1

Korollar 2: $(n^j \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist Lösung der Rekursion

$(\delta - \lambda)^{j+1} x_n = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} x_{n+k} (-\lambda)^{j+1-k} = 0$$

Das ermöglicht es, auch bestimmte inhomogene Rekursionen zu lösen.
Betrachte Rekursion

$x_{n+d} - a_1 x_{n+d-1} - \dots - a_d x_n = c \cdot n^j \lambda^n$

für $a_1, \dots, a_d$ aus dem Körper, $c, \lambda \in K$, $j \in \mathbb{N}$.

(1) $(\delta^d - a_1 \delta^{d-1} - \dots - a_d \, id)(x_n) = c n^j \lambda^n$.

Somit ist Lösung ein affiner Unterraum des Raumes der Folgen.
Wir benötigen also ein Element davon („partikuläre Lösung") und Basis des zugehörigen UR.
(= Lösung der homogenen Glg).

Sei x_n eine partikuläre Lösung.
Rechte Seite wird von $(\delta - \lambda)^{j+1}$ annulliert. Wende somit $(\delta - \lambda)^{j+1}$ auf (1) an und erhalte

(2) $(\delta - \lambda)^{j+1}(\delta^d - a_1 \delta^{d-1} - \dots - a_d \, id)(x_n) = 0$

x_n ist daher Lösung einer homogenen lin. Rekursion höherer Ordnung.
Sei $t^d - a_1 t^{d-1} - \dots - a_d = (t-\lambda)^{\mu_0}(t-\lambda_1)^{\mu_1} \dots (t-\lambda_k)^{\mu_k}$
mit $0 \le \mu_0 \quad 1 \le \mu_1, \dots, \mu_k$

char. Poly von (2) ist somit

$(t-\lambda)^{\mu_0 + j + 1}(t-\lambda_1)^{\mu_1} \dots (t-\lambda_k)^{\mu_k}$.

Somit: $x_n \in \mathrm{span}\{\underbrace{\lambda^n, n \cdot \lambda^n, \dots, n^{\mu_0 - 1}\lambda^n}_{\text{homogen Glg}}, n^{\mu_0}\lambda^n, \dots, n^{\mu_0 + j}\lambda^n, \underbrace{\lambda_1^n, \dots, n^{\mu_k - 1}\lambda_k^n}_{\text{Lösungen der homogenen Glg.}}\}$

also ohnehin im VR

es reicht, den Ansatz

$x_n = n^{\mu_0}(C_1 \cdot \lambda^n + C_2 n \lambda^{n-1} + \dots + C_j n^j \lambda^n)$ zu machen.

Bestimmung der Konstanten durch Einsetzen in (1).

Bsp.: $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + n^1 \cdot 2^n \qquad x_0 = 1$
$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n \cdot 2^n \qquad x_1 = 17$

char. Glg. homogen: $t^2 - 4t + 4 = 0$
$(t-2)^2 = 0$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$\tilde{x}_n = n^2(A2^n + Bn^1 2^n) = An^2 \cdot 2^n + Bn^3 \cdot 2^n$

$\tilde{x}_{n+1} = A(n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + B(n+1)^3 \cdot 2^{n+1}$

$\tilde{x}_{n+2} = A(n+2)^2 \cdot 2^{n+2} + B(n+2)^3 2^{n+2}$

$4A(n+2)^2 \cancel{2^n} + 4B(n+2)^3 \cancel{2^n} = 8A(n+1)^2 \cancel{2^n} + 8B(n+1)^3 \cancel{2^n} - 4An^2 \cancel{2^n} - 4Bn^3 \cancel{2^n} + n \cancel{2^n}$

n^3: $4B = 8B - 4B$ w. A.
n^2: $4A + 24B = 8A + 24B - 4A$ w. A.
n: $16A + 48B = 16A + 24B + 1 \Rightarrow 24B = 1 \quad B = \frac{1}{24}$
1: $16A + 32B = 8A + 8B \qquad 8A = -24B$
$A = -3B = -\frac{1}{8}$

$\tilde{x}_n = -\frac{1}{8}n^2 2^n + \frac{1}{24}n^3 2^n$

Insgesamt:
$x_n = -\frac{1}{8}n^2 \cdot 2^n + \frac{1}{24}n^3 \cdot 2^n + C \cdot 2^n + Dn \cdot 2^n$

C, D so bestimmen, dass Startwerte passen

6.7.5. Differentialgleichungen

$x_1(t), \ldots, x_n(t) \ldots$ Funktionen abh. von Zeit

Differentialgleichungen

$$x'_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \ldots + a_{1n} x_n(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = a_{n1}(t) + \ldots + a_{nn} x_n(t)$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad x'(t) = A \cdot x(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$T^{-1} A T = J$ Jordanzerlegung

$A = TJT^{-1}$

$T^{-1} |$ $\quad x'(t) = TJT^{-1} x(t)$

$T^{-1} x'(t) = JT^{-1} x(t) \qquad T^{-1} x(t) = y(t) \Rightarrow y'(t) = T^{-1} x'(t)$

$y'(t) = J \cdot y(t)$

Wir müssen nur mehr sowas für Jordanblöcke lösen können:

$$y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t)$$
$$y_2'(t) = \lambda y_2(t) + y_3(t)$$
$$\vdots$$
$$y_r'(t) = \lambda \cdot y_r(t)$$

Substituiere: $y_j(t) = e^{\lambda t} z_j(t) \qquad y_j'(t) = \underbrace{\lambda e^{\lambda t} z_j(t)}_{\lambda y_j(t)} + e^{\lambda t} z_j'(t)$

$\Rightarrow e^{\lambda t} z_j'(t) = e^{\lambda t} z_{j+1}(t) \quad [j < r]$

$z_j'(t) = z_{j+1}(t)$

$z_1'(t) = z_2(t) \qquad z_1(t) = c_r t^{r-1} + \ldots + c_1$

$z_2'(t) = z_3(t)$

$\vdots \qquad z_{r-1} = c_r t + c_{r-1}$

$z_r'(t) = 0 \qquad z_r = c_r$

alles rücksubstituieren und - - -