

1. Vektor- und Matrizennormen

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0001 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 2.0000 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0001 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

Löse GLS $Ax^{(1)} = c$, $Ax^{(2)} = d$, $Bx^{(3)} = c$, $Bx^{(4)} = d$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ -0.0001 \end{pmatrix}$$

A ist **schlecht konditioniert**, $\kappa_2(A) = 40002$, B ist **gut konditioniert**,
 $\kappa_2(B) = 2.6184$.

2. Skalarprodukte+Orthogonalität

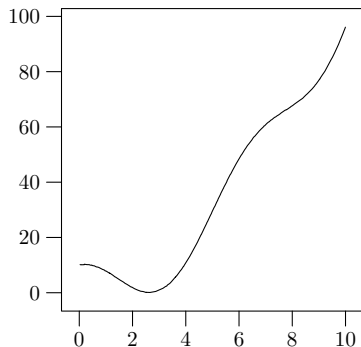
Gegeben seien 200 Punktepaare

0.030309884000	10.179922000000
0.048384392000	10.120494000000
0.083117662000	10.145601000000
⋮	⋮
9.967067200000	95.324167000000
9.996520900000	96.100050000000

Gesucht ist jene Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5e^x + a_6 \cos x + a_7 \sin x,$$

die die Punkte am besten approximiert.



3a. Eigenwerte

Betrachte eine (abgeschlossene) Population von Hühnern und Füchsen. Die Anzahl der Hühner zum Zeitpunkt n sei H_n , jene der Füchse F_n . Es gelte

$$F_{n+1} = 0.6F_n + 0.5H_n$$

$$H_{n+1} = -kF_n + 1.2H_n \quad k \text{ „Killrate“}$$

Zum Zeitpunkt 0 gibt es $F_0 = 100$ Füchse und $H_0 = 1000$ Hühner.

- ▶ Wie entwickeln sich F_n, H_n für $n \rightarrow \infty$?
- ▶ Wie groß muss k sein, damit beide Populationen aussterben?
- ▶ Gibt es einen „stabilen“ Zustand?

3b. Symmetrisches Eigenwertproblem

Diskretisieren der stationären **Wärmeleitungsgleichung**

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit dem finiten Differenzen Schema

$$-\frac{u(x_k + h) - 2u(x_k) + u(x_k - h))}{h^2} = f(x_k)$$

ergibt ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} f(1/6) \\ \vdots \\ f(5/6) \end{pmatrix}$$

tridiagonale,
positiv definite
Matrix

4. Singulärwertzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 0.3023161 & 0.7667215 & 0.3111570 \\ -0.2835463 & 0.2194864 & -0.0403317 \\ -0.1163911 & 0.1914451 & 0.0094212 \\ -0.2112675 & 0.4953307 & 0.0587599 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0.302324 & 0.766728 & 0.311133 \\ -0.283463 & 0.219550 & -0.040571 \\ -0.116693 & 0.191214 & 0.010283 \\ -0.211201 & 0.495382 & 0.058570 \end{pmatrix}$$

Numerische Rechnungen ergeben $\text{rank}(A) = 3$, $\text{rank}(B) = 2$ und $\|A - B\|_2 = 0.001$. Ist Rang „echt“ ist oder durch numerisches Rauschen verursacht?