1.3.2010

Teil I: Normen

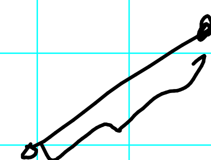
Kap 1. Vektor- und Operatornormen

1.1. Vektornormen

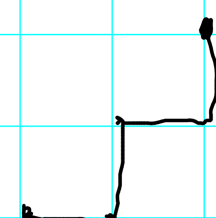
<u>Notation.</u> K ... Körper (irgendeiner)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Geg. Vektor $x \in \mathbb{K}^n$. Gesucht: „Größe" bzw. „Länge"



- Euklidische Länge
- maximaler Eintrag von Interesse (jeder Eintrag ist Zeit, max. Zeitdauer gefragt)
- Summe der Einträge



„Manhattan bzw Taxi-Metrik"

<u>Definition.</u> Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Vektornorm auf V, wenn

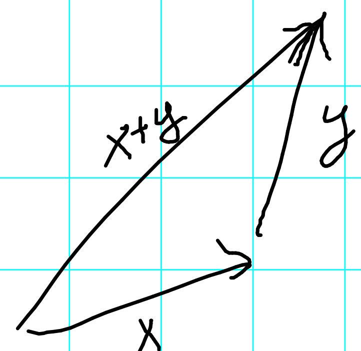
(N1) $\forall x \in V: \quad \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N2) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall x \in V: \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$\uparrow$
Absolutbetrag in $\mathbb{K}$

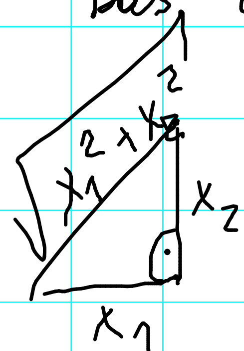
(N3) $\forall x,y \in V: \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ „Dreiecksungleichung"

<u>Bemerkung</u> N3 besagt, dass Umwege nichts bringen dürfen.

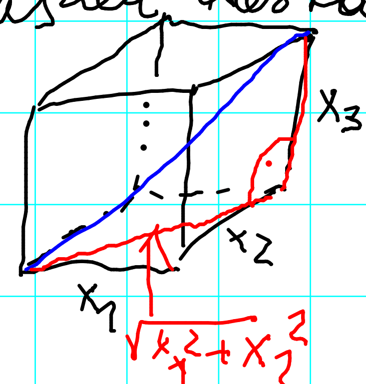


<u>Beispiele</u>. 1) $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$ auf $\mathbb{K}^n$.

Das entspricht dem Euklidischen Abstand in $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$



Pythagoras.



$$\sqrt{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

$\| \ \|_2$ erfüllt Normaxiome:

(N1) $\|x\|_2 \geq 0$ folgt aus Absolutbeträgen usw

Wenn $\|x\|_2 = 0$, dann $\underbrace{|x_1|^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{|x_n|^2}_{\geq 0} = 0$, also

$|x_1|^2 = 0$, $|x_2|^2 = 0$ $\dots$, $|x_n|^2 = 0$ $\Longrightarrow$ $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$
$\Longrightarrow x = 0$

(N2)
$$\|\alpha x\|_2 = \sqrt{|\alpha x_1|^2 + \dots + |\alpha x_n|^2} =$$
$$= \sqrt{|\alpha|^2 |x_1|^2 + \dots + |\alpha|^2 |x_n|^2} =$$
$$= \sqrt{|\alpha|^2 \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)} = |\alpha| \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = |\alpha| \cdot \|x\|_2 .$$

(N3) Das zu Beginn von Kap 3 gratis aus einem allgemeineren Resultat folgen.

2) $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$ $\quad p \geq 1$

(N1), (N2) leicht

(N3) i.A. Minkowskische Ungl. $\lightning$ (hier nicht)

Spezialfall $p = 1$. $\quad \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ hier ohne Minkowski, vgl Ü-M.

3) $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, ---, |x_n|)$ Ü12

4) $C[a,b]$ stetige Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$.

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \, dx} \quad p \geq 1$$

(N1) Aufpassen auf Stetigkeit
(N2) leicht
(N3) Minkowski (hier nicht)

5) $C[a,b]$ stetige Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$

$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ $\cancel{\mathfrak{k}}$ leichter als bei p-Norm

Satz 1.1. (Normäquivalenzsatz) Seien $\|\ \|$ und $\|\ \|'$ zwei Vektornormen auf $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es positive Konstanten c_1 und c_2, sodass für alle $x \in \mathbb{K}^n$:

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|$$

Beweis wird verschoben

Beispiel. $1 \cdot \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, ---, |x_n|\} = \sqrt{\max\{|x_1|^2, ---, |x_n|^2\}} \leq$

$$\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$\leq \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \dots + \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

<u>Bemerkung</u>. Bei Übergang zu einer anderen Norm im $\mathbb{K}^n$ ändert sich qualitatives Verhalten (z.B. Konvergenz, Unbeschränktheit) nicht.
„winzig“ „riesig“

1.2. Matrizen- und Operatornormen

geg. Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ges „Größe“

eine Variante wäre, eine $m \times n$-Matrix als $m \cdot n$-Vektor zu sehen:

<u>Definition</u>. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, dann definiere

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

„Frobenius-Norm“

Bemerkung. $\| \, \|_F$ erfüllt automatisch (N1) – (N3) einer Vektornorm.

Die Frobenius-Norm kann mehr.

Proposition Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\|\underbrace{A\cdot x}_{\text{Vektor im } \mathbb{K}^m}\|_2 \leq \|\underbrace{A}_{\text{Matrix in } \mathbb{K}^{m\times n}}\|_F \cdot \|\underbrace{x}_{\text{Vektor im } \mathbb{K}^n}\|_2$$

Beweis. $$\|Ax\|_2^2 = \cancel{\sum_{i=1}^m (Ax)_i^2} = \sum_{i=1}^m |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \leq$$

(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.:
$$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$$
(vgl Kap 3 oder allerlei))

$$\leq \sum_{i=1}^m \left(\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right) \right) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)}_{\|A\|_F^2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)}_{\|x\|_2^2}. \quad \square$$

Wir sagen auch, die Frobenius-Norm sei mit der 2-Norm verträglich,

Allgemeinere Situation: $F: V \to W$ lin. Abb. Eine noch zu definierende Norm von F (wir schreiben sie als $\|F\|$) soll für alle $x \in V$ die Ungleichung

$$\underbrace{\|F(x)\|}_{\text{eine feste Norm in } W} \le \underbrace{\|F\|}_{\text{die wollen wir definieren.}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\text{eine feste Norm in } V},$$

also für $x \neq 0$

$$\frac{\|F(x)\|}{\|x\|} \le \|F\|$$

Da wir sparsam sein wollen, soll $\|F\|$ nicht größer als unbedingt notwendig sein

$V \neq \{0\}$

<u>Definition.</u> Seien V und W zwei Vektorräume, $\|\ \|_V$ und $\|\ \|_W$ Vektornormen auf V bzw. W und $F: V \to W$ linear. Dann definiere

$$\|F\|_{V,W} := \sup \left\{ \frac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} \;\middle|\; x \in V \setminus \{0\} \right\}$$

„induzierte Operatornorm von F"

„durch $\| \|_V$ und $\| \|_W$ induzierte Operatornorm von F"

4.3.2010

Diese Operatornorm hat nette Eigenschaften:

$V \neq \{0\}$

<u>Satz 1.12</u> (Eigenschaften induzierter Operatornormen) Seien V und W zwei Vektorräume, $\| \|_V$ und $\| \|_W$ Vektornormen auf V bzw W und $\| \|_{V,W}$ induzierte Operatornorm. Dann gilt

1) $\forall F: V \to W$ linear: $\|F\|_{V,W} \geq 0$ und $\|F\|_{V,W} = 0 \Leftrightarrow F = 0$

2) $\forall F: V \to W$ linear $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\|\alpha F\|_{V,W} = |\alpha| \cdot \|F\|_{V,W}$

3) $\forall F, G: V \to W$ linear: $\|F+G\|_{V,W} \leq \|F\|_{V,W} + \|G\|_{V,W}$

4) $\forall F: V \to W$ lin. $\forall x \in V$: $\|F(x)\|_W \leq \|F\|_{V,W} \cdot \|x\|_V$

5) Sei X ein weiterer Vektorraum mit Vektornorm $\| \|_X$, $F: V \to W$ linear, $G: W \to X$ linear. Dann gilt
$$\|G \circ F\| \leq \|G\| \cdot \|F\|$$

V,X $\quad W,X \quad$ V,W

(wobei $\| \ \|_{V,X}$ und $\| \ \|_{W,X}$ die durch $\| \ \|_V$ und $\| \ \|_X$ bzw. durch $\| \ \|_W$ und $\| \ \|_X$ induzierten Operatornormen sind.).

<u>Bemerkung</u> 1–3 besagt, dass eine induzierte Operatornorm tatsächlich eine Norm auf dem Raum der Matrizen ist;
4 Verträglichkeit (die die Definition motiviert hatte).

<u>Beweis des Satzes</u>

4). Für $x=0$ ist $0 = \|0\|_W = \|F(0)\|_W \le \|F\|_{V,W} \cdot \underbrace{\|0\|_V}_{0} = 0$

zu zeigen, ✓

Für $x \neq 0$ gilt $\dfrac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} \le \sup\left\{ \dfrac{\|F(y)\|_W}{\|y\|_V} \;\middle|\; y \neq 0 \right\} = \|F\|_{V,W}$,

also $\|F(x)\|_W \le \|F\|_{V,W} \cdot \|x\|_V$.

1) $$\|F\|_{V,W} = \underbrace{\sup\left\{ \underbrace{\frac{\overbrace{\|F(x)\|_W}^{\ge 0}}{\underbrace{\|x\|_V}_{>0}}}_{\ge 0} \;\middle|\; x \neq 0 \right\}}_{\ge 0}$$

✓

$$\|0\|_{V,W} = \sup\left\{ \underbrace{\frac{\|0\|_W}{\|x\|_V}}_{0} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} = 0 \qquad \checkmark$$

$\|x\|_V > 0$

Nehmen wir an, dass $\|F\|_{V,W} = 0$, also

$$0 = \sup\left\{ \frac{\|F(x)\|_W}{\underbrace{\|x\|_V}_{>0}} \;\middle|\; x \neq 0 \right\},$$

somit $\dfrac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} = 0$ für alle $x \neq 0$,

also $\|F(x)\|_W = 0$ für alle $x \neq 0$, also lt N1 $F(x) = 0$ für alle $x \in V$ (für $x=0$ stimmt das sowieso), $\Rightarrow F = 0$ $\checkmark$

2) $$\|\alpha F\|_{V,W} = \sup\left\{ \frac{\|\alpha F(x)\|_W}{\|x\|_V} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} \overset{N2}{=} \sup\left\{ \frac{|\alpha|\,\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} = |\alpha| \sup\left\{ \frac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} = |\alpha| \cdot \|F\|_{V,W} \qquad \checkmark$$

3) $$\|F+G\|_{V,W} = \sup\left\{ \frac{\|(F+G)(x)\|_W}{\|x\|_V} \,\middle|\, x \neq 0 \right\} =$$

$(F+G)(x) = F(x)+G(x)$

$$\overset{\text{N3 für } \|\,\|_W}{\leq} \sup\left\{ \frac{\|F(x)\|_W + \|G(x)\|_W}{\|x\|_V} \,\middle|\, x \neq 0 \right\} \leq$$

$$\overset{4}{\leq} \sup\left\{ \frac{\|F\|_{V,W}\cancel{\|x\|_V} + \|G\|_{V,W}\cancel{\|x\|_V}}{\cancel{\|x\|_V}} \,\middle|\, x \neq 0 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \|F\|_{V,W} + \|G\|_{V,W} \,\middle|\, x \neq 0 \right\} = \|F\|_{V,W} + \|G\|_{V,W}$$

5) $F: V \to W \qquad G: W \to X$

$$\|G \circ F\|_{V,X} = \sup\left\{ \frac{\|G \circ F(x)\|_X}{\|x\|_V} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$$

$$\left[\|G \circ F(x)\|_X = \|G(\boxed{F(x)})\|_X \overset{4.(G)}{\leq} \|G\|_{W,X} \|\boxed{F(x)}\|_W \overset{4.(F)}{\leq} \|G\|_{W,X} \|F\|_{V,W} \|x\|_V \right]$$

$$\Rightarrow \|G \circ F\|_{V,X} \leq \sup\left\{ \frac{\|G\|_{W,X} \|F\|_{V,W} \cancel{\|x\|_V}}{\cancel{\|x\|_V}} \,\middle|\, x \neq 0 \right\} =$$

$$= \|G\|_{W,X} \quad \|F\|_{V,W}$$ ✓

$\square$

<u>Lemma.</u> Sei $F: V \to W$ linear, $\| \ \|_V$ und $\| \ \|_W$ Vektornormen auf V bzw. W. Dann gilt

$$\|F\|_{V,W} = \sup \left\{ \|F(x)\|_W \;\middle|\; x \in V \text{ mit } \|x\|_V = 1 \right\}.$$

Wenn V endlichdimensional ist, wird das Supremum auch angenommen, also

$$\|F\|_{V,W} = \max \left\{ \|F(x)\|_W \;\middle|\; x \in V \text{ mit } \|x\|_V = 1 \right\}$$

<u>Beweis.</u> Für alle $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$ gilt

$$\|F(x)\|_W = \frac{\|F(x)\|_W}{\underbrace{\|x\|_V}_{=1}} \leq \|F\|_{V,W};$$

also $S := \sup \left\{ \|F(x)\|_W \;\middle|\; x \in V \text{ mit } \|x\|_V = 1 \right\} \leq \|F\|_{V,W}$

Umgekehrt schreibe ein $y \in V$, $y \neq 0$, in der Form $y = \alpha \cdot z$, wobei $\alpha = \|y\|_V$ und $\|z\|_V = 1$. Dann gilt

$$\frac{\|F(y)\|_W}{\|y\|_V} = \frac{\|F(\alpha z)\|_W}{\alpha} = \frac{\cancel{|\alpha|} \cdot \|F(z)\|_W}{\underset{>0}{\cancel{\alpha}}} = \|F(z)\|_W \leq S$$

$$\Rightarrow \|F\|_{V,W} = \sup\left\{ \frac{\|F(y)\|_W}{\|y\|_V} \;\middle|\; y \neq 0 \right\} \leq S.$$

$$\Rightarrow \|F\|_{V,W} = S.$$

Für Maximum: Die Abb. $x \mapsto \|F(x)\|_W$ ist stetig:

$$\|F(x)\|_W - \|F(y)\|_W = \|F(x) - F(y) + F(y)\|_W - \|F(y)\|_W$$

$$\overset{N3}{\leq} \|F(x) - F(y)\|_W + \cancel{\|F(y)\|_W} - \cancel{\|F(y)\|_W} =$$

$$= \|F(x-y)\|_W \leq \|F\|_{V,W} \cdot \|x-y\|_V$$

(sogar Lipschitz-stetig)

Da $\{x \in V \mid \|x\|_V = 1\}$ beschränkt und abgeschlossen

$\overset{\text{Analysis}}{\Longrightarrow}$ Maximum wird angenommen $\square$

<u>Satz 1.3</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann gilt

1) $$\|A\|_\infty := \|A\|_{\infty,\infty} = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;\middle|\; i \in \{1,\dots,m\} \right\}$$

die durch $\| \; \|_\infty$ auf $\mathbb{K}^n$ und $\| \; \|_\infty$ auf $\mathbb{K}^m$ induzierte Operatornorm.

„Zeilensummennorm"

2) $$\|A\|_1 := \|A\|_{1,1} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \;\middle|\; j \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

die durch $\| \; \|_1$ auf $\mathbb{K}^n$ und $\| \; \|_1$ auf $\mathbb{K}^m$ induzierte Operatornorm

„Spaltensummennorm"

<u>Bemerkung</u> $\|A\|_\infty$ ist i. A. größer als $\max_{i,j} |a_{ij}|$,

Beweis des Satzes 1) $ZS(A) := \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;\middle|\; i \in \{1, \dots, m\} \right\}$.

Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$. Dann gilt

$$\|A \cdot x\|_\infty = \max_i |(A \cdot x)_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty = 1} \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ZS(A),$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty = \sup \{ \|Ax\|_\infty \mid \|x\|_\infty = 1 \} \leq ZS(A)$$

Umgekehrt. Jene Zeile mit maximaler „Zeilensumme" sei Zeile g, also

$$ZS(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{gj}|$$

Wir setzen

$$y_j = \begin{cases} \frac{|a_{gj}|}{a_{gj}} & \dots\; a_{gj} \neq 0 \\ 1 & \dots\; a_{gj} = 0 \end{cases}$$

Es gilt $|y_j| = 1$ und

$a_{gj}\, y_j = |a_{gj}|$ für alle j

Wir betrachten

$$\underbrace{\|A\|_\infty}_{\|A\|_\infty} \cdot \underbrace{\|y\|_\infty}_{1} \overset{4}{\geq} \|Ay\|_\infty \geq |(Ay)_g| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{gj}\, y_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{gj}|\right| = ZS(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \|A\|_\infty \geq ZS(A)$$

2) $=$ Ü 18

Notation Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann setze $\|A\|_2$ die durch $\| \|_2$ auf $\mathbb{K}^n$ und $\| \|_2$ auf $\mathbb{K}^m$ induzierte Operatornorm

Bemerkung Bis jetzt haben wir außer der direkten Info $\|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ keinerlei konkrete Informationen über $\|A\|_2$.