Kap. 2. Sensitivität linearer Gleichungssysteme

(4.3.2010)

2.1. Störung der rechten Seite.

Definition Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann setze

$$\kappa(A) = \begin{cases} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| & \text{.... wenn } A \text{ regulär ist} \\ \infty & \text{wenn } A \text{ singulär ist,} \end{cases}$$

wobei $\| \ \|$ eine beliebige, aber feste, Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$ bzw. die durch sie induzierte Operatornorm ist.
„Konditionszahl von A"

Bemerkung „Die Konditionszahl hängt von der gewählten Norm

Satz 2.1. Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär, $0 \neq b$, $\Delta b \in \mathbb{K}^n$ und $x, \Delta x \in \mathbb{K}^n$ die eindeutigen Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$Ax = b \qquad \text{und} \qquad A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

und $\| \ \|$ eine feste Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$ bzw. die dadurch induz. Operatornorm. Dann gilt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

<u>Beweis</u>.

$$Ax = b$$

$$Ax + A\Delta x = b + \Delta b \implies A\Delta x = \Delta b$$

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \overset{4}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \qquad (1)$$

Weiters:
$$\|b\| = \|Ax\| \overset{4}{\leq} \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|} \qquad (2)$$

Kombiniere (1) und (2) und erhalte

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \qquad \square$$

<u>Bemerkung 1</u>. Mögliche Anwendung: b durch Messfehler verfälscht

... Fehlerfortpflanzung.

2. Sei $Ax = b$ ein reales Gleichungssystem,

$\tilde{x}$ Näherungslösung

Probe: $A\tilde{x} = \tilde{b}$ $\qquad \tilde{b} \approx b$

Der Satz sagt:

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

3. Kleines $K(A)$ ... „A ist gut konditioniert"
Großes $K(A)$ .... „A ist schlecht konditioniert"

Lt Ü24: $K(A) \geq 1$.

8.3.2010

2.2. Sensitivität bei beidseitiger Störung

Ziel: $Ax = b$ $\qquad (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$

Gesucht: Absch. für $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq$??

Wir brauchen A regulär und eigentlich auch $A+\Delta A$ regulär.
Kann man vielleicht für „kleine" ΔA sogar beweisen, dass dann $A+\Delta A$ regulär ist"?

Lemma. Sei $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$ und die dadurch induzierte Operatornorm. Wenn $\|B\| < 1$, so ist $I - B$ regulär und es gilt

$$\|(I-B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

Beweis. Annahme: $I - B$ ist singulär. Dann gibt es ein $x \neq 0$, $x \in \mathbb{K}^n$ mit $(I-B)x = 0$, also $x = Bx$.

Somit

$$\|x\| = \|Bx\| \overset{5.1.2(4)}{\leq} \underbrace{\|B\|}_{<1} \cdot \underbrace{\|x\|}_{>0} < \|x\|$$

Widerspruch

$(I-B)^{-1} \cdot |$

Es gilt für bel. festes $K \in \mathbb{N}$

$$(I-B)\sum_{k=0}^{K} B^k = I - B^{K+1}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{K} B^k = (I-B)^{-1} \cdot (I - B^{K+1})$$

$$\iff \sum_{k=0}^{K} B^k = (I-B)^{-1} - (I-B)^{-1} B^{K+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{K} B^k + (I-B)^{-1} B^{K+1} = (I-B)^{-1}$$

$$\Rightarrow \|(I-B)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{K} B^k + (I-B)^{-1} B^{K+1} \right\| \leq$$

$$\underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \sum_{k=0}^{K} \|B^k\| + \|(I-B)^{-1} \cdot B^{K+1}\|$$

$$\underset{5.1.2(5)}{\overset{\text{Ü17a}}{\leq}} \sum_{k=0}^{K} \|B\|^k + \|(I-B)^{-1}\| \cdot \|B\|^{K+1}$$

$$= \frac{1-\|B\|^{K+1}}{1-\|B\|} + \|(I-B)^{-1}\| \cdot \|B\|^{K+1}$$

$\|B\|^{K+1} \to 0$, $\quad \|B\|^{K+1} \xrightarrow{K\to\infty} 0$

Grenzübergang $K \to \infty$

$$\|(I-B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

$\square$

Satz 2.2. Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär, $\Delta A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $0 \neq b, \Delta b, x, \Delta x \in \mathbb{K}^n$ mit

$Ax = b \qquad (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$

und

$$\delta := \max\left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right\} \quad \text{und} \quad r = \delta \cdot \kappa(A)$$

Wenn $r < 1$ $\left(\Leftrightarrow \delta < \frac{1}{\kappa(A)} \right)$, dann gilt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{2\kappa(A)}{1-r} \max\left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right\}$$

<u>Bemerkung</u>. Der Faktor $\frac{1}{1-r}$ „Gestraft" Ausnutzung der Grenze $r<1$.

z.B. $r = 0.99 \Rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-0.99} = \frac{1}{0.01} = 100$

$r = 0.5 \Rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-0.5} = 2$

$r = 0.01 \Rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-0.01} = \frac{1}{0.99} \approx 1.01$

<u>Beweis des Satzes</u>

$$A + \Delta A = A + AA^{-1}\Delta A = A\left(I - (-A^{-1}\Delta A)\right)$$

Da $\|-A^{-1}\Delta A\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| \le \|A^{-1}\|\,\delta \cdot \|A\| = \delta\kappa(A)$

$= r < 1$, gilt lt Lemma, dass

$I - (-A^{-1}\Delta A)$ regulär ist und

daher auch $A \cdot \left(I - (-A^{-1}\Delta A)\right) = A + \Delta A$.

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$$

$$(A+\Delta A)x + (A+\Delta A)\Delta x = b + \Delta b$$

$$(A+\Delta A)\Delta x = \cancel{b} + \Delta b - \cancel{Ax} - \Delta A x$$

$A^{-1} \cdot |$

$$A(I + A^{-1}\Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A x$$

$(I+A^{-1}\Delta A)^{-1} \cdot |$

$$(I + A^{-1}\Delta A)\Delta x = A^{-1}\Delta b - A^{-1}\Delta A x$$

$$\Delta x = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}(A^{-1}\Delta b - A^{-1}\Delta A x)$$

$$\|\Delta x\| \leq \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \left(\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| + \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x\|\right)$$

S 1.2
2 x (5)
1 x (3)
2 x (4)

$$\underset{\text{Lemma}}{\leq} \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\left(\|A^{-1}\| \delta \underbrace{\|b\|}_{=Ax} + \|A^{-1}\| \delta \cdot \|A\| \|x\|\right)$$

$$\overset{S\,1.2(4)}{\leq} \frac{1}{1-r}\left(\|A^{-1}\| \delta \|A\| \|x\| + \|A^{-1}\| \delta \|A\| \|x\|\right)$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(2 \cdot \kappa(A) \cdot \delta\right) \cdot \|x\|$$

(dividère ohrd $\|X\|$) $\square$