(8.3.2010)

Teil II Innere Produkte

Kap 3. Innere Produkte und Orthogonalität.

3.1. Unitäre und Euklidische Räume

Definition Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Inneres Produkt auf V, wenn

(IP1) $\forall\ x, y, z \in V$: $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(IP2) $\forall\ x, y \in V\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

„linear im 2. Arg"

(IP3) $\forall\ x, y \in V$: $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Das Paar $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ heißt Innerer-Produkt-Raum (IPR)

Wenn zusätzlich

(IP4) $\forall\ x \in V \setminus \{0\}$: $\langle x, x \rangle > 0$,

dann spricht man von einem positiv definiten inneren Produkt. In diesem Fall spricht man auch von einem Euklidischen Raum (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder einem unitären Raum (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Bemerkungen. 1) IP4 besagt insbesondere, dass $\forall x \in V$ $\langle x, x \rangle$ reell ist.

2) Man könnte die Theorie auch für linear im 1. Argument

entwickeln.

Lemma. Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein IP auf V, $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle \alpha x, z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle$$

Beweis $\langle x+y, z \rangle \underset{IP3}{=} \overline{\langle z, x+y \rangle} \underset{IP1}{=} \overline{\langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle} = \overline{\langle z, x \rangle} + \overline{\langle z, y \rangle} =$

$$\underset{2\times\ IP3}{=} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle \alpha x, z \rangle \underset{IP3}{=} \overline{\langle z, \alpha x \rangle} \underset{IP2}{=} \overline{\alpha \langle z, x \rangle} = \overline{\alpha}\, \overline{\langle z, x \rangle} \underset{IP3}{=} \overline{\alpha} \langle x, z \rangle \quad ! \qquad \square$$

Bemerkung.
- Ein IP über $\mathbb{C}$ ist linear im 2. Argument und „semilinear" im 1. Argument, also „sesquilinear".
- Ein IP über $\mathbb{R}$ ist linear in beiden Argumenten, also „bilinear".

TeXnische Bemerkung: `\langle x, y \rangle`

Beispiele

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^n.$

$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$ „Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$"

„Standard-IP" auf $\mathbb{R}^n$

$\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot x_j = \sum \underbrace{x_j^2}_{\geq 0} \geq 0$ mit „Gleichheit genau für"

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, also $x = 0$

Also: $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-IP ist ein Euklidischer Raum.

2) $\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad V = \mathbb{C}^n$

$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}\, y_j$ „Standard-IP" auf $\mathbb{C}^n$,

$\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot x_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j|^2}_{\geq 0} \geq 0$ mit Gleichheit genau

für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, also $x = 0$.

Also: $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-IP ist ein unitärer Raum,
(und ohne die komplexe Konjugation wäre p.d. schiefgegangen)

3) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A^* := \bar{A}^t = A$ und setze

$\langle x, y \rangle_A := \underbrace{x^*}_{1\times n} \underbrace{A}_{n \times n} \underbrace{y}_{n\times 1} \in \mathbb{C}$. Beh: das ist IP:

$$\langle x, y+z \rangle_A = x^* A (y+z) = x^*(Ay + Az) = x^*Ay + x^*Az =$$

$$= \langle x, y \rangle_A + \langle x, z \rangle_A .$$

$$\langle x, \alpha y \rangle_A = x^* A(\alpha y) = \alpha \cdot x^* A y = \alpha \langle x, y \rangle_A .$$

$$\langle y, x \rangle_A = y^* A x \underset{\uparrow}{=} (y^* A x)^t = x^t A^t \bar{y} = \overline{x^* A^* y} =$$

1x1-Matrix, vlg. Zahl

$$= \overline{x^* A y} = \overline{\langle x, y \rangle_A} .$$

IP1 – IP3 gelten, $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ ist IP.

3a) Dieses mit $A = 0$.

$$\langle x, y \rangle_0 = 0 \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}^n$$

nicht p.d.

3b) Dieses mit $A = I$ ... Standard IP.

Fazit: $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ist für manche A p.d.

Eine Matrix A mit $A^* = A$ heißt positiv definit, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ positiv definit ist.

4) Sei $C[a,b]$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ mit Werten in $\mathbb{C}$.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

(ist p.d. IP auf $C[a,b]$)

<u>Bemerkungen</u> IP über $\mathbb{R}$ heißen Skalarprodukt

IP über $\mathbb{C}$ heißt auch Hermitesches Produkt.

Notation Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann heißt

$$A^H = A^* = \overline{A^t}$$

die zu A adjungierte Matrix

Bemerkung

$$A^* = (\overline{A})^t \quad , \text{wobei} \quad \overline{A} = \left(\overline{a_{jk}} \right)_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}})$$

also komponentenweise komplexe Konjugation.

Rechenregeln:

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$
$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha}\, A^*$$
$$(A \cdot B)^* = \left(\overline{A \cdot B}\right)^t = (\overline{A} \cdot \overline{B})^t = \overline{B}^t \cdot \overline{A}^t = B^* A^*$$
$$(A^*)^* = A$$

3.2. Durch innere Produkte definierte Normen

Definition Sei V ein Vektorraum mit p.d. inneren Produkt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dann heißt

$$\|x\|_{\langle \cdot,\cdot \rangle} = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

die durch das IP $\langle \cdot , \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V.

Ist das wirklich Vektornorm?

1) $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \iff \langle x,x\rangle = 0 \overset{IP4}{\iff} x = 0.$

$$\langle \underset{\in V}{0}, \underset{\in V}{0} \rangle = \langle \underset{\in V}{0}, \underset{\in K}{0} \cdot \underset{\in V}{0} \rangle = \underset{\in K}{0} \langle \underset{\in V}{0}, \underset{\in V}{0} \rangle = 0$$

$\|x\| \geq 0$ wegen IP4

2) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\bar{\alpha}\alpha \langle x,x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x,x\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x,x\rangle} =$
$= |\alpha| \cdot \|x\|$

11.3.2010

<u>Lemma</u> (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Sei V ein IPR mit p.d. IP $\langle \cdot , \cdot \rangle$ und $x, y \in V$. Dann gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y l.a. sind

<u>Bemerkung</u> Für das Standard-IP folgt

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2},$$

also die übliche Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

<u>Beweis des Lemmas</u> Wir betrachten $x - \mu y$ für ein noch zu wählendes $\mu \in \mathbb{K}$.
Weil $\langle \cdot , \cdot \rangle$ p.d. ist, folgt für $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x - \mu y, x - \mu y\rangle = \langle x - \mu y, x\rangle - \mu \langle x - \mu y, y\rangle =$$
$$= \langle x, x\rangle - \bar{\mu}\langle y, x\rangle - \mu \langle x, y\rangle + \mu\bar{\mu}\langle y, y\rangle$$

Wähle $\mu = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$ $\left(\Rightarrow \bar{\mu} = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \right)$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle - \cancel{\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle} + \cancel{\frac{\langle x, y\rangle \langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

Ziehe Wurzel und fertig.

Gleichheit für $x - \mu y = 0$, also x, y l.a.
Für den Fall $y = 0$ folgt $\langle x, 0\rangle = 0$, also ist $0 \leq 0$ zu zeigen ✓
Die Vektoren sind auch l.a.

$\square$

Satz 3.1. Sei V ein IPR mit p.d. IP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\ \|$ die von $\langle \cdot, \cdot\rangle$ induzierte Norm. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf V.

Beweis N1, N2 bereits oben überprüft.

(N3)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle x,y\rangle + \|y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$
$$\underset{C.S.}{\leq} \|x\|^2 + 2\,\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\|+\|y\|\right)^2$$

Wurzel ziehen und fertig $\square$

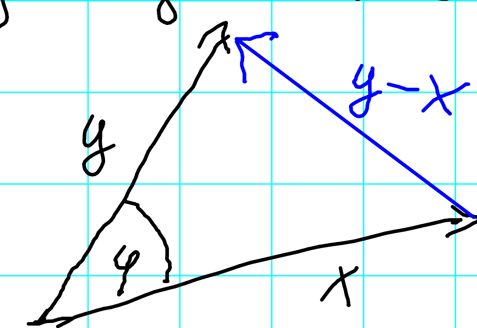
<u>Bemerkung</u>. Das <u>Standard-IP auf</u> $\mathbb{K}^n$ induziert die 2-Norm.

$$\sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum |x_j|^2} = \|x\|_2 .$$

3.3. Skalarprodukt und Winkel

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-IP im $\mathbb{R}^n$ (mit $n\in\{2,3\}$)

Seien $x,y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ und φ der von x und y eingeschlossene Winkel



Cosinussatz

$$\|y-x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cos\varphi$$

$$\langle y-x, y-x\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\|x\|\|y\|\cos\varphi$$

$$\cancel{\langle y,y\rangle} - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \cancel{\langle x,x\rangle} = \cancel{\langle x,x\rangle} + \cancel{\langle y,y\rangle} - 2\|x\|\|y\|\cos\varphi$$

$\mathbb{R}^n$!

$$-2\langle x,y\rangle = -2\|x\|\|y\|\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

In einem allgemeinen IPR über $\mathbb{R}$ mit p.d. IP (= Euklidischer Raum) ist das Konzept des Winkels bis jetzt nicht definiert.

<u>Definition</u> Sei V ein Euklidischer Raum, $x, y \in V\setminus\{0\}$. Dann definiere den von x und y eingeschlossenen Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ durch

$$\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|},$$

<u>Bemerkung</u> Laut Cauchy-Schwarz gilt $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1,$$

also gibt es genau ein $\varphi \in [0,\pi]$ mit $\cos\varphi = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$

Philosophische Bemerkung: Hier wurde der Cosinussatz aus der Trigonometrie vorausgesetzt und daraus die Beziehung zwischen IP und Winkel hergeleitet.
Es gibt auch die Strömung, den Winkel überall (auch in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) einfach über das IP zu definieren.

3.4 Orthogonalität

In diesem Abschnitt sei V ein IPR.

Definition Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, wenn

$$\langle x, y \rangle = 0$$

(Bem. entspricht einem Winkel von $90°$)

Satz 3.2. (Pythagoras) Seien $x, y \in V$ orthogonal. Dann gilt

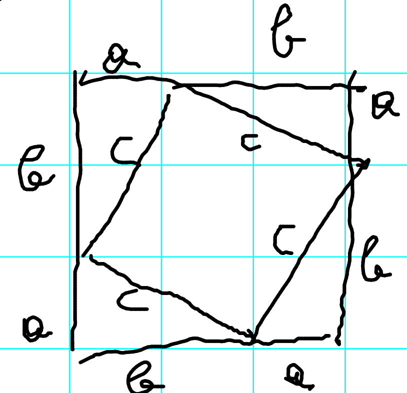
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Beweis.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$\square$

(Ersetzt nicht einen der vielen elementargeom. Beweise des elem. geom. Satzes von Pythagoras, z. B.,



$(a+b)^2$ = Fläche groß =

$$= c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2}$$

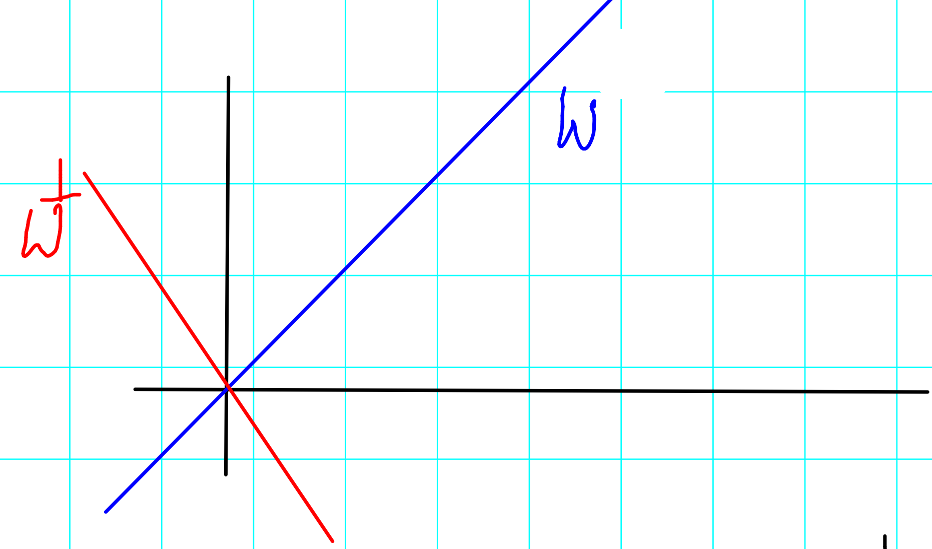
$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$$
)

Definition Sei $W \leq V$. Dann setze

$$W^\perp = \{\, x \in V \mid \forall y \in W: \langle x,y\rangle = 0 \,\}$$

„orthogonale Komplement" von W.

Beispiel



Proposition. Sei $W \leq V$. Dann ist $W^\perp$ auch ein Untervektorraum von V.

Beweis. Seien $u, v \in W^\perp$, $\alpha, \beta \in K$, $y \in W$. Dann gilt

$$\langle \alpha u + \beta v, y \rangle = \bar{\alpha} \underbrace{\langle u, y \rangle}_{=0} + \bar{\beta} \underbrace{\langle v, y \rangle}_{=0} = 0,$$

also $\alpha u + \beta v \in W^\perp$.

Jedenfalls gilt $0 \in W^\perp$, weil $\forall y \in W: \langle 0, y \rangle = 0$ $\square$

Ab jetzt bis zum Ende dieses Abschnitts wird $\langle \cdot , \cdot \rangle$ als p.d. vorausgesetzt

Proposition. Sei $W \leq V$. Dann gilt

$$W \cap W^\perp = \{0\}$$

Bemerkung Das heißt $W + W^\perp = W \oplus W^\perp$

(Wir werden später beweisen, dass unter geeigneten Voraussetzungen
$$W \oplus W^\perp = V$$
gilt)

<u>Beweis der Prop.</u> Sei $v \in W \cap W^\perp$. Dann gilt
$$\langle \underbrace{v}_{\in W^\perp}, \underbrace{v}_{\in W} \rangle = 0$$

Also $\|v\| = 0$ und daher $v = 0$.
Außerdem sind W und $W^\perp$ Untervektorräume und enthalten damit jeweils die 0. $\square$

<u>Definition (Orthogonalsystem)</u> Sei $S \subseteq V$. Dann heißt S ein Orthogonalsystem, wenn

1) $\forall\ v \in S: \quad v \neq 0$
2) $\forall\ v, w \in S$ mit $v \neq w: \quad \langle v, w \rangle = 0$

S heißt darüber hinaus ein Orthonormalsystem, wenn

3) $\forall\ v \in S: \quad \|v\| = 1.$

Beispiele. 1) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\mathbb{K}^n$ mit Standard-IP. ist Orthonormalsystem.

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{R}^2$ mit Standard-IP.

$1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$ Orthogonalsystem

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{R}^2$ mit dem durch $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ induz. IP

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

ist Orthogonalsystem.

4) $S = \{x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{x \mapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$

bzgl des IP $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$ über $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx =$$

$$\left.\begin{aligned} \sin((m+n)x) &= \sin mx\cos nx + \sin nx\cos mx \\ \sin((m-n)x) &= \sin mx\cos nx - \sin nx\cos mx \end{aligned}\right\} +$$

$$\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x) = 2\sin mx\cos nx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{-1}{m+n}\cos((m+n)x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{-1}{m-n}\cos((m-n)x)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(-1)}{m+n}\Big(\underbrace{(-1)^{m+n} - (-1)^{-(m+n)}}_{=0}\Big) - \frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\Big(\underbrace{(-1)^{m-n} - (-1)^{n-m}}_{=0}\Big)$$

$= 0$ für $m \neq n$, für $m = n$ hätte es auch gestimmt ...

weiters nachzurechnen: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0$ für $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \qquad \text{für } n \neq m.$$

5) $S = \{ e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \}$ $\qquad C[-\pi, \pi]$ komplexwertig.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cdot e^{imx} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{i(m-n)} \left((-1)^{m-n} - (-1)^{n-m} \right) & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & n = m \end{cases}$$

Orthogonalsystem

$$\tilde{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ist ONS}$$

oder verwende neues IP

$$\langle f, g \rangle_{neu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx ,$$

dann ist ursprl. S ein ONS bzgl. neuen IP.

<u>Proposition.</u> Sei S ein Orthogonalsystem in V. Dann ist S l.u.

Beweis. Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Bilde IP mit v_j

$$0 = \langle v_j, 0 \rangle = \langle v_j, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \rangle =$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_j, v_1 \rangle}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_j, v_2 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{>0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_j, v_n \rangle}_{=0},$$

also $0 = \alpha_j \cdot \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{>0} \Rightarrow \alpha_j = 0$

Das funktioniert für jedes $j \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ $\square$

Definition Ein Orthogonalsystem, das auch Basis von V ist, heißt Orthogonalbasis.

Ein Orthonormalsystem, das auch Basis von V ist, heißt Orthonormalbasis ONB

Bemerkung. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine ONB von V, $z \in V$. Dann gilt

$$z = \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, z \rangle \cdot v_j$$

$\Big($ Ansatz: $\displaystyle z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$

$$\langle v_k, z \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle v_k, \alpha_j \cdot v_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{\delta_{kj}}$$

Kronecker-Delta

$$\Rightarrow \langle v_k, z \rangle = \alpha_k \Big)$$

Kann also ~~I~~ Inverse der Koordinatenabb. bzgl ONB leicht bestimmen $\square$

3.5. Matrixdarstellung Innerer Produkte

15.3.2010

Satz 3.3. Sei V ein IPR mit IP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$, sodass für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \left(\Phi_B^{-1}(v)\right)^* M \, \Phi_B^{-1}(w).$$

Weiters gilt dann $M^* = M$.

Beweis. Sei $v = \Phi_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, also $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$$w = \Phi_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

Dann folgt

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j v_j, \sum_{k=1}^n y_k v_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{x_j} \, y_k \langle v_j, v_k \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{x_j} \langle v_j, v_k \rangle y_k =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \dots & \overline{x_n} \end{pmatrix}}_{= \Phi_B^{-1}(v)^*} \underbrace{\left(\langle v_j, v_k \rangle\right)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}}}_{M :=} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\Phi_B^{-1}(w)},$$

Sei N eine weitere $\mathbb{K}^{n\times n}$-Matrix, sodass

$$\langle v,w\rangle = \Phi_B^{-1}(v)^* \, N \, \Phi_B^{-1}(w) \qquad \text{für alle } v,w\in V.$$

Wir setzen $v=v_j$, $w=v_k$, also $\Phi_B^{-1}(v_j)=e_j$, $\Phi_B^{-1}(v_k)=e_k$,

also $\langle v_j, v_k\rangle = \underbrace{e_j^*}_{e_j^t} N e_k = N_{jk}$, also $M=N$.

Schließlich:

$$M^* = \left(\langle v_j,v_k\rangle\right)^*_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}} = \left(\overline{\langle v_j,v_k\rangle}\right)^t_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}} = \left(\overline{\langle v_k,v_j\rangle}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}} =$$

$$= \left(\langle v_j,v_k\rangle\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}} = M$$

$\square$

Bemerkung 1 Satz 3.3 ist also eine „Umkehrung" zum Bsp 3 nach der Def. von inneren Produkten: für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $A^* = A$, wurde dort

$$\langle x, y \rangle_A = x^* A y$$

definiert. Bzgl. der Standardbasis ist A die Matrixdarst. des IP $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Bemerkung 2. Die ersten beiden Aussagen von Satz 3.3. (Existenz & Eindeutigkeit der darst. Matrix) hätten auch für Sesquilinearformen gegolten:

Eine Sesquilinearform $s: V \times V \to \mathbb{K}$ ist eine Abb., die

1) linear im 2. Argument, also $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$s(x, \alpha y + \beta z) = \alpha s(x,y) + \beta s(x,z)$$

2) semilinear im 1. Argument, also $\forall x, y, z \in V\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$s(\alpha x + \beta y, z) = \overline{\alpha} s(x,z) + \overline{\beta} s(y,z)$$

Diese kann man verallgemeinern zu Sesquilinearformen über bel. Körpern K, wo an die Stelle der komplexen Konjugation ein beliebiger Körperautomorphismus ζ tritt

(d.h. ζ bijektiv, $\forall \alpha, \beta \in K$: $\zeta(\alpha + \beta) = \zeta(\alpha) + \zeta(\beta)$

$\zeta(\alpha \cdot \beta) = \zeta(\alpha) \cdot \zeta(\beta)$)

Wenn $\zeta = \mathrm{id}$, so spricht man von einer Bilinearform.
Der Unterschied zum IP ist also (IP3) bzw. im Satz 3.3 die Aussage $M = M^*$.

Was passiert mit darstellender Matrix bei Basiswechsel?

$B = (v_1, \dots, v_n)$ alte Basis
$C = (w_1, \dots, w_n)$ neue Basis

$$M = (\langle v_j, v_k \rangle)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}} \quad \text{Matrixdarst. bzgl. } B$$

$$N = (\langle w_j, w_k \rangle)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}}$$

Sei $T = (t_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}}$ die Übergangsmatrix, die neue Basis durch alte Basis ausdrückt, also

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} v_j .$$

$$\langle w_j, w_k \rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^{n} t_{\ell j} v_\ell , \sum_{m=1}^{n} t_{mk} v_m \right\rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \overline{t_{lj}} \langle v_l, v_m \rangle t_{mk} = \left(\overline{T}^{*} M T\right)_{jk}$$

$$\Longrightarrow N = \overline{T}^{*} M T$$

(vgl. Basiswechsel bei lin. Abb.: $T^{-1} M T$)

<u>Satz 3.4 (Basiswechsel)</u> Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein IP auf dem $\mathbb{K}$-VR V, $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $C = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V mit Übergangsmatrix $T = (t_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}}$, $w_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} v_j$, M und N die Matrixdarst. von $\langle \cdot , \cdot \rangle$ bzgl B bzw. C. Dann gilt

$$N = \overline{T}^{*} M T$$

<u>Beweis</u> siehe oben.

Bei lin. Abb. konnten wir Basen so wählen, dass die Matrixdarst die Gestalt $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ hatte (Basis aus Dimensionsformel, vgl Zeilenrang = Spaltenrang).

Auch hier wollen wir Basis haben, bzgl. der die Matrixdarst. eines IP „einfach" wird.

Proposition Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein IP auf dem endl-dim $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann gibt es eine Basis B von V, bezüglich der das IP durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

Beweis Induktion nach $\dim V =: n$

$n=1$. nichts zu zeigen (jede 1×1-Matrix ist Diagmatrix)

Allg. Fall. Falls $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die Nullabb. ist, wähle irgendeine Basis und die Nullmatrix

Andernfalls* gibt es ein $v \in V$ mit $\langle v, v\rangle \neq 0$. Dann betrachte

$$U = \{ w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \}$$
$$= \operatorname{Ker}(w \mapsto \langle v, w\rangle)$$

$$\dim U = n - \underbrace{\dim \operatorname{Im}(w \mapsto \langle v,w\rangle)}_{1} = n-1.$$

Wir betrachten die Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf U.
Da $\dim U < n$, gibt es eine Basis $u_1, \dots, u_{n-1}$ von U,

bzgl der $\langle\cdot,\cdot\rangle|_U$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird. Da jedes u_i auf v nach Def von w normal steht, können wir v zur Basis hinzufügen und die darst. Matrix bleibt Diagonalmatrix.

* Bem: $\forall w \in V$: $\langle w,w\rangle = 0$. Dann folgt für alle $v,w \in V$, dass

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\langle v+w, v+w\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v-w, v-w\rangle}_{=0}\Big) = 0$$

$\square$

3.6. Sylvesterscher Trägheitssatz und positiv definite Matrizen 1

Satz 3.5. (Sylvesterscher Trägheitssatz) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein IP auf V. Dann gibt es eine Basis B von V, bezüglich der $\langle\cdot,\cdot\rangle$ durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

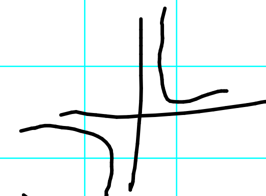
dargestellt wird. Die Anzahl der Einsen sowie die Anzahl der -1

hängt nicht von der gewählten Basis ab.

Bemerkung Betrachte die Menge

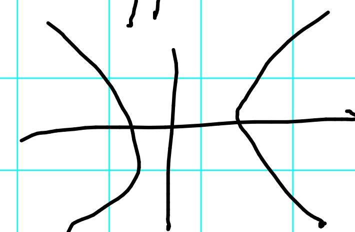
$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \}$$

($xy = 1$ $\qquad y = \frac{1}{x}$



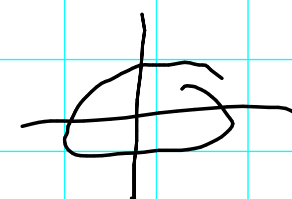
„Hyperbel"

$x^2 - y^2 = 1$



„Hyperbel"

$2x^2 + 3y^2 = 1$



„Ellipse".)

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x\ y) \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_A$$

Sylvester sagt, dass bzgl geeigneter Basis $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ dargestellt wird, wobei $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, +1, -1\}$

Bzgl neuer Koord $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (Koord bzgl neuer Basis) schreibt sich die Kurvengleichung als

$$\sigma_1 u^2 + \sigma_2 v^2 = d.$$

Fall, dass ein $\sigma_j = 0$ führt zu zwei parallelen Geraden (= fad)

Fall $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$ $\quad u^2 + v^2 = d$ ... Kreis, $\underbrace{\text{Punkt oder Leer}}_{= \text{fad}}$.

Fall $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1$ $\quad u^2 - v^2 = d$ ... Hyperbel in

Sylvester sagt weiters, dass Ellipsen keine Hyperbeln sind.

Beweis des Satzes. Die Prop am Endes des vorigen Abschnitts erwirkt bereits Darstellung durch Diagonalmatrix D bzgl. Basis $v_1, \ldots, v_n$.

$$D = \operatorname{diag}\left(\langle v_1, v_1\rangle, \ldots, \langle v_n, v_n\rangle\right)$$

Ersetze v_j durch $w_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\langle v_j, v_j\rangle|}} v_j & \ldots \text{ wenn } \langle v_j, v_j\rangle \neq 0 \\ v_j & \ldots \text{ wenn } \langle v_j, v_j\rangle = 0 \end{cases}$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{|\langle v_j, v_j\rangle|}} v_j, \frac{1}{\sqrt{|\langle v_j, v_j\rangle|}} v_j \right\rangle = \frac{\langle v_j, v_j\rangle}{|\langle v_j, v_j\rangle|} \in \{\pm 1\}.$$

Vertausche Basiselemente, sodass $+1$ links oben stehen, -1 in der Mitte, die 0 rechts unten.
Sei r die Anzahl der $+1$.
Wir müssen r „kanonisch", d.h. ohne Verwendung der Basis, beschreiben.

<u>Behauptung</u>: $r = \max\{\dim U \mid U \leq V, \text{ sodass } \langle\cdot,\cdot\rangle|_U \text{ p.d. ist}\}$.
(vgl von der Idee LA1 Ü54)

<u>Beweis der Beh.</u> 1) Sei $W = \mathrm{span}\{w_1, \dots, w_r\}$ (wobei die w_j schon richtig sortiert seien)

<u>Beh.</u> $\langle\cdot,\cdot\rangle|_W$ ist p.d.

Sei $z = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r \in W$. Dann gilt

$$\langle z, z\rangle = \langle \sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j, \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell w_\ell \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_j \alpha_\ell \underbrace{\langle w_j, w_\ell\rangle}_{\delta_{j\ell}} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^2 \geq 0,$$

mit Gleichheit genau für $z=0$

$\boxed{\text{Bek}}$

$\Longrightarrow r \leq \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ sodass } \langle\cdot,\cdot\rangle|_U \text{ p.d. ist}\}$

2) Annahme: es gebe ein $U \subseteq V$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle|_U$ p.d und $\dim U > r$.

Es gilt $\underbrace{U}_{\dim > r} \cap \underbrace{\operatorname{span}\{w_{r+1},\dots,w_n\}}_{\dim = n-r} \neq \{0\}$,

weil es aus Dimensionsgründen keine direkte Summe ist.

Wähle ein $z \neq 0$, $z \in U \cap \operatorname{span}\{w_{r+1},\dots,w_n\}$ und schreibe

$$z = \alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n$$

$$\underbrace{0 <}_{z \in U} \langle z, z\rangle = \left\langle \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j w_j, \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k w_k \right\rangle =$$

$=$

$$= \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{\ell=r+1}^{n} \alpha_j \alpha_\ell \underbrace{\langle w_j, w_\ell \rangle}_{\substack{0 \text{ abseits Diag } j \neq \ell \\ \leq 0 \text{ auf Diag } j = \ell}} =$$

$$= \sum_{j=r+1}^{n} \underbrace{\alpha_j^2}_{\geq 0} \underbrace{\underbrace{\langle w_j, w_j \rangle}_{\in \{0, -1\}}}_{\leq 0} \leq 0$$

Widerspruch.

Behauptung

$\Longrightarrow$ r hängt nicht von Basis ab.

Für Anzahl der -1 entweder analoge Behauptung beweisen oder $-\langle \cdot , \cdot \rangle$ und führe es auf bewiesenen Fall zurück.

Den müssen nehmen, was übrigbleibt auch Eindeutig.

Satz.

<u>Definition</u>. Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein IP auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, mit r mal 1 und s mal -1 auf der Diagonale lt. Sylvester.

$r+s$ .... Rang von $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$r-s$ ... Signatur von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
(r,s) heißt auch Signatur von $\langle\cdot,\cdot\rangle$

18.3.2010

Definition Eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $M^* = M$ heißt positiv definit, wenn das IP $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ mit $\langle x,y\rangle_M = x^* M y$ positiv definit ist, also $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $\langle x,x\rangle_M = x^* M x > 0$.

M heißt negativ definit, wenn $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass $\langle x,x\rangle_M = x^* M x < 0$.

M heißt positiv semidefinit, wenn $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt, dass $\langle x,x\rangle_M = x^* M x \geq 0$

M heißt negativ semidefinit, wenn $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt, dass $\langle x,x\rangle_M = x^* M x \leq 0$

M heißt indefinit, wenn M weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, es also $x, y \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\langle x, x\rangle_M = x^* M x > 0 \quad \text{und} \quad \langle y, y\rangle_M = y^* M y < 0$$

gibt

<u>Bemerkungen</u> 1) Für $M^* = M$ und $x \in K^n$ gilt jedenfalls $\langle x, x\rangle_M \in \mathbb{R}$, weil

$$\overline{\langle x, x\rangle_M} = \langle x, x\rangle_M .$$

2) Mehrdimensionale Taylor-Formel: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, \dots, x_n)$

$$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad H_F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le n}}$$

Taylor:

$$F(x) = F(x_0) + \langle \operatorname{grad} F, (x - x_0)\rangle + \frac{1}{2} \underbrace{\langle x - x_0, x - x_0\rangle_{H_F}}_{(x - x_0)^t H_F (x - x_0)} + \text{Rest}$$

Notwendig für lok. Extremum: $\operatorname{grad} F = 0$

Wenn H_F neg. def., dann lok. Max. in x_0

pos. def. lok. Min in x_0.

Für Anwendungen in der Analysis ist es also wichtig, einigermaßen leicht feststellen zu können, ob geg. Matrix H_F positiv definit ist.

3) M ist neg. def $\Longleftrightarrow$ $-M$ pos. def.
M ist neg. semidefinit $\Longleftrightarrow$ $-M$ pos. semidefinit ist.

<u>Lemma 1</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ p.d. und $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Dann ist auch $T^* A T$ positiv definit.

<u>Beweis</u> Basiswechsel!

$$x^*(T^*AT)x = (x^*T^*)A(Tx) = (Tx)^*A(Tx) > 0 \quad \text{für } Tx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \square$$

<u>Lemma 2</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ p.d. Dann gilt $\det A > 0$.

<u>Beweis</u>. Wir wählen eine Basis B, bezüglich der $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ durch eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ dargestellt wird. Dann gilt

$$A = T^t D T$$

für passende reguläre Matrix T und

$$d_j = \langle v_j, v_j \rangle_A > 0,$$

wobei $B = (v_1, \ldots, v_n)$

$$\Rightarrow \det A = \det\left(T^t D T\right) = \det(T^t) \det D \det T =$$
$$= \det(T) \det D \det T =$$
$$= \underbrace{\left(\det(T)\right)^2}_{>0} \underbrace{d_1}_{>0} \underbrace{d_2}_{>0} \cdots \underbrace{d_n}_{>0} > 0 .$$

$\square$

<u>Satz 3.6</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^t = A$. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind. (der k-te Hauptminor ist die Determinante der linken oberen $k \times k$-Teilmatrix von A)

22.3.2010

Beweis Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_A$ und setze $W_k = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$.

Betrachte $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k}$ (Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf W_k)

Die Matrixdarst. von $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k}$ ist $A^{(k)}$ (linke obere $k\times k$-Teilmatrix von A)
(bzgl. Standardbasis)
Lt Sylvester können wir eine Basis B_k von W_k wählen, sodass $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k}$ bzgl. B_k durch eine Diagonalmatrix D_k dargestellt wird, wobei die Diagonalelemente von $D_k \in \{0, \pm 1\}$ sind, d.h.

$$A^{(k)} = S_k^t \, D_k \, S_k$$

für passende reguläre Matrix $S_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

$$\det A^{(k)} = \det S_k^t \cdot \det D_k \cdot \det S_k = \underbrace{\Big(\underbrace{\det S_k}_{\neq 0}\Big)^2}_{>0} \cdot \det D_k$$

also hat $\det A^{(k)}$ dasselbe Vorzeichen wie $\det D_k$.

$$\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k} \text{ p.d.} \Longleftrightarrow A^{(k)} \text{ p.d.} \overset{\text{Lemma 1}}{\Longleftrightarrow} D_k \text{ p.d.} \Longleftrightarrow D_k = I_k$$

„$\Rightarrow$" A p.d. $\Rightarrow \langle\cdot,\cdot\rangle$ p.d. $\Rightarrow \langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k}$ p.d. $\Rightarrow D_k = I_k \Rightarrow \det D_k = 1^k = 1$,
also $\det A^{(k)} > 0$ ✓

„$\Leftarrow$" Durch Induktion nach $k \geq 1$ beweise, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k}$ p.d. für $k \in \{1,\dots,n\}$ ist.

$k=1$. 1×1 Matrix p.d. $\Leftrightarrow$ der einzige Eintrag $>0 \Leftrightarrow \det A^{(1)} > 0$ ✓

$(k-1)\to k$. Da $\det A^{(k)} > 0$, folgt $\det D_k > 0$

Also hat D_k auf der Diagonale eine gerade Anzahl von -1 und keine Nullen.

Sylvester: die Anzahl der $+1$ ist max. Dimension eines Teilraums von W_k, auf dem $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_k}$ p.d. ist.

Lt. Ind. Ann. ist $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{W_{k-1}}$ p.d. und $W_{k-1} \leq W_k$,
also besitzt D_k mind. $k-1$ Diagonalelemente $+1$.
Somit höchstens ein Diagonalelement -1, also aus Paritäts=
gründen kein Diagonalelement -1, $\Rightarrow D_k = I_k \Rightarrow$

$\langle \cdot , \cdot \rangle|_{W_k}$ ist p.d. ✓ $\square$

Korollar. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^t = A$. Dann ist A genau dann negativ definit, wenn die Hauptminoren von A abwechselnd negativ und positiv sind, also

$$\det A^{(k)} \begin{cases} < 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Beweis. A negativ definit $\Longleftrightarrow$ $-A$ pos. def. $\underset{\text{Satz 3.6}}{\Longleftrightarrow}$ $\det(-A^{(k)}) > 0$ für alle k

$\Longleftrightarrow (-1)^k \det A^{(k)} > 0 \Longleftrightarrow$ das, was im Korollar behauptet wird. $\square$

(18.3.2010)

Definition Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine quadratische Form $q: V \to \mathbb{K}$ ist eine Abbildung, für die es ein IP $\langle \cdot , \cdot \rangle$ auf V gibt, sodass $\forall x \in V$: $\quad q(x) = \langle x, x \rangle$

3.7. Innere Produkte und Dualraum

Satz 3.7. Sei V ein endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das nicht degeneriert ist, d.h. $\forall x \in V \setminus \{0\} \ \exists y \in V$ mit $\langle x, y \rangle \neq 0$, und Ü36

$$\Psi : V \longrightarrow V^* ; \quad c \longmapsto \langle c, \cdot \rangle \quad \text{mit}$$

$$\langle c, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R} ; \quad x \longmapsto \langle c, x \rangle .$$

Dann ist Ψ ein Vektorraum-Isomorphismus.

Bemerkung 1. Jedes p.d. IP ist nicht degeneriert, weil $\forall x \in V \setminus \{0\}$ gilt $\langle x, x \rangle > 0$

2. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt ein analoger Satz (Rieszscher Darstellungssatz) auch in unendlicher Dimension.

Beweis des Satzes Die Abbildung $x \longmapsto \langle c, x \rangle$ ist linear, weil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear im 2. Argument ist, d.h. $\Psi : V \to V^*$ ist wohldefiniert

Linearität von Ψ:

$$\Psi(\alpha c + \beta d) = \langle \alpha c + \beta d, \cdot \rangle$$

$$\Psi(\alpha c + \beta d)(x) = \langle \alpha c + \beta d, x \rangle = \alpha \langle c, x \rangle + \beta \langle d, x \rangle =$$

$$= \alpha \Psi(c)(x) + \beta \Psi(d)(x) =$$

$$= (\alpha \Psi(c) + \beta \Psi(d))(x),$$

also $\Psi(\alpha c + \beta d) = \alpha \Psi(c) + \beta \Psi(d)$

für $c, d, x \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Injektivität: $\Psi(c) = 0 \Leftrightarrow \langle c, x \rangle = 0$ für alle x

$\Leftrightarrow c = 0$ wegen nicht-degeneriert.

Da $\dim V = \dim V^*$ folgt automatisch auch die Surjektivität

$\square$