Kapitel 4. Innere Produkte und lineare Abbildungen

(18.3.2010)

4.1. Adjungierte Abbildungen

Alle IP in diesem Kapitel sind p.d.

Definition. Seien V, W zwei IPR und $F: V \to W$ linear. Eine Abbildung $G: W \to V$ heißt zu F adjungierte Abbildung, wenn

$\forall x \in V \ \forall y \in W$:

$$\langle \underbrace{F(x)}_{\in W}, \underbrace{y}_{\in W} \rangle_{\text{IP in } W} = \langle \underbrace{x}_{\in V}, \underbrace{G(y)}_{\in V} \rangle_{\text{IP in } V}.$$

Beispiel $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ jeweils mit Standard-IP;
$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$; $x \mapsto Ax$

$$\langle F_A(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = (Ax)^* y = (x^* A^*) y =$$
$$= x^* (A^* y) = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, F_{A^*}(y) \rangle$$

für $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$; also ist $F_{A^*} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$; $y \mapsto A^* y$ zu F adjungiert.

Bemerkung 1) So einfach geht es nur bei Standard-IP und Matrixdarstellung bzgl Standardbasis

2) Wenn G zu F adjungiert ist, heißt das noch lange nicht, dass G die Inverse von F ist; wenn F nicht bijektiv ist ($z B$ $m \neq n$), gibt es ja gar keine ~~volle~~ Inverse.

Lemma. Sei V ein IPR, $x \in V$, $y \in V$. Wenn für **alle** $z \in V$ gilt, dass

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle,$$

dann folgt $x = y$.

Beweis. $z = x - y$. Dann folgt

$$\langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle \overset{\text{Vor}}{=} 0,$$

also folgt aus der vorausgesetzten positiven Definitheit $x = y$. $\square$

Proposition. Seien V, W zwei IPR, $F: V \to W$ linear und $G: W \to V$ eine zu F adjungierte Abb. Dann ist G linear

Beweis. Seien $y, z \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $x \in V$

$$\langle x, G(\alpha y + \beta z) \rangle \underset{\text{Adj}}{=} \langle F(x), \alpha y + \beta z \rangle =$$

$$\underset{\text{lin des IP}}{=} \alpha \langle F(x), y \rangle + \beta \langle F(x), z \rangle =$$

$$\underset{\text{Adj}}{=} \alpha \langle x, G(y) \rangle + \beta \langle x, G(z) \rangle$$

$$\underset{\text{lin des IP}}{=} \langle x, \alpha G(y) + \beta G(z) \rangle$$

$$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad G(\alpha y + \beta z) = \alpha G(y) + \beta G(z).$$

$\square$

Proposition. Seien V, W IPR, $F : V \to W$ linear, $G : W \to V$ und $H : W \to V$ seien zu F adjungiert. Dann gilt $G = H$.

Beweis. Für alle $x \in V$ $y \in W$ gilt

$$\langle x, G(y) \rangle \underset{\text{Adj } G}{=} \langle F(x), y \rangle \underset{\text{Adj } H}{=} \langle x, H(y) \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad G(y) = H(y) \quad \text{für alle } y \in W. \quad \Longrightarrow \quad G = H$$

$\square$

Satz 4.1. (Existenz und Formel für adj. Abb.) Seien V, W IPR, $\dim V < \infty$, $F: V \to W$ linear. Dann gibt es eine zu F adjungierte Abbildung $F^*: W \to V$.

Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so gilt

$$F^*(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}^{-1} \begin{pmatrix} \langle F(v_1), y \rangle \\ \vdots \\ \langle F(v_n), y \rangle \end{pmatrix}$$

Beweis. Ansatz: $F^*(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$

Es muss für alle $x \in V$ gelten, dass

$$\langle F(x), y \rangle = \langle x, F^*(y) \rangle$$

Das ist äquivalent dazu, dass diese Aussage für alle Basiselemente $v_1, \dots, v_n$ von V gilt, also

$$\langle v_i, F^*(y) \rangle = \langle F(v_i), y \rangle \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle v_i, \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \rangle = \langle F(v_i), y \rangle \qquad \text{—— // ——}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle \cdot c_j = \langle F(v_i), y \rangle \qquad \text{—— // ——}$$

Das ist lin. GLS für $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ mit Systemmatrix

$$M := \left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$ und rechte Seite $\begin{pmatrix} \langle F(v_1), y \rangle \\ \vdots \\ \langle F(v_n), y \rangle \end{pmatrix}$

Wenn M invertierbar ist, so folgt

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \langle F(v_1), y \rangle \\ \vdots \\ \langle F(v_n), y \rangle \end{pmatrix}$$

M ist darst. Matrix des p.d. IP, daher folgt lt Lemma 2 aus Abschnitt 3.6, dass $\det M > 0$, also insbesondere $\det M \neq 0$, also ist M regulär

$\square$

22.3.2010

Notation. Sei $F: V \to W$ linear, V, W IPR. Wenn eine zu F adjung. Abb existiert (also insbes. wenn $\dim V < \infty$), so bezeichne diese mit F^*.

zu Beispiel. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ $x \mapsto Ax$ mit Standard-IP.

Verwende Formel aus Satz 4.1.

$$F_A^*(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \underbrace{\Big(\underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} \Big)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}^{-1}}_{I^{-1} = I} \begin{pmatrix} \langle Ae_1, y \rangle \\ \vdots \\ \langle Ae_n, y \rangle \end{pmatrix}$$

$$F_A^*(y) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle Ae_1, y \rangle \\ \vdots \\ \langle Ae_n y \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, y \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n, y \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* y \\ \vdots \\ a_n^* y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} y = A^* y$$

wobei $A = (a_1, \ldots, a_n)$; somit $F_A^* = F_{A^*}$, wie schon oben (mit weniger Aufwand) herausgefunden.

Definition. Seien V, W IPR, $F: V \to W$ linear. Dann heißt F selbstadjungiert, wenn $F^* = F$.

ad Bsp. F_A ist selbstadjungiert $\iff$ $A^* = A$.

Proposition. (Rechenregeln für adj. Abb.): Seien V, W IPR, $F: V \to W$, $G: V \to W$ linear, U ein weiterer IPR, $H: U \to V$ linear, $\alpha \in K$. Dann gilt

1) $(F+G)^* = F^* + G^*$
2) $(\alpha F)^* = \bar{\alpha} F^*$
3) $(F \circ H)^* = H^* \circ F^*$
4) $(F^*)^* = F$

Beweis 3) $\langle F \circ H(x), y \rangle_W = \langle F(H(x)), y \rangle_W = \langle H(x), F^*(y) \rangle_V =$

$$= \langle x, H^*(F^*(y)) \rangle_U = \langle x, (H^* \circ F^*)(y) \rangle_U$$

für $x \in U$, $y \in W$

usw. (Privatvergnügen).

4.2 Unitäre Abbildungen

Definition. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ IPR, $F: V \to W$ linear. Dann heißt F *unitär*, wenn

$$\forall x, y \in V: \quad \langle F(x), F(y) \rangle_W = \langle x, y \rangle_V .$$

geometrische Interpretation: $\|F(x)\| = \sqrt{\langle F(x), F(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$

eine unitäre Abb ist also längentreu.

$$\cos \sphericalangle (F(x), F(y)) = \frac{\langle F(x), F(y) \rangle}{\|F(x)\| \cdot \|F(y)\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos \sphericalangle (x, y)$$

eine unitäre Abb. ist winkeltreu.

Lemma. Sei V endl. dim. IPR, $F: V \to V$ linear. Dann ist F genau dann unitär, wenn $F^* \circ F = \mathrm{id}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} F \text{ unitär} &\Leftrightarrow \forall x, y \in V: \quad \langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in V: \quad \langle x, F^*(F(y)) \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall y \in V: \quad F^*(F(y)) = y \end{aligned}$$

Lemma aus 4.1 $\Longleftrightarrow$ $F^* \circ F = \mathrm{id}$. $\square$

also: unitäre Endom. sind invertierbar und Adjungierte = Inverse

<u>Proposition</u>, Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standard-IP auf $\mathbb{K}^n$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) $F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n ; x \mapsto Ax$ ist unitär
2) $A^* A = I$, also $A^{-1} = A^*$
3) Die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem,

<u>Beweis</u>. 1) $\overset{\text{Lemma}}{\Longleftrightarrow}$ $F_A^* \circ F_A = \mathrm{id}$ $\underset{\substack{\text{Bsp in} \\ \text{Abschnitt 4.1}}}{\Longleftrightarrow}$ $F_{A^*} \circ F_A = \mathrm{id}$

$\underset{\text{Matrixdarst}}{\Longleftrightarrow}$ $F_{A^* \cdot A} = \mathrm{id}$ $\Longleftrightarrow$ $A^* \cdot A = I$ $\Longleftrightarrow$ 2)

2) $\Longleftrightarrow$ $(A^* A)_{jk} = \delta_{jk}$ für alle j, k

$\Longleftrightarrow$ $a_j^* \cdot a_k = \delta_{jk}$ —"— , wobei $A = (a_1, \dots, a_n)$

$\Leftrightarrow \quad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk}$ —— " ——

$\Leftrightarrow \quad (a_1, \dots, a_n)$ bilden Orthonormalsystem $\Leftrightarrow$ 3)

<u>Bemerkung</u> „Matrixdarst. von Endomorphismen" Basiswechsel : $T^{-1} M T$
„Matrixdarst. von IP/Quadr. Formen" —"— : $T^* M T$
„Wenn T unitär ist, gilt $T^* = T^{-1}$, alles ist schön."

<u>Definition</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den äquiv. Eigenschaften dieser Proposition. Dann heißt A unitär (bzw. orthogonal, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

<u>Satz 4.2.</u> Sei V ein endl.-dim $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U(V) := \{ F : V \to V \text{ unitär} \}$. Dann bildet $U(V)$ eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung, die sog. unitäre Gruppe (bzw. orthogonale Gruppe) von V.

<u>Beweis</u>. 1) Seien $F, G \in U(V)$. z.z. $F \circ G \in U(V)$.

$$\langle (F \circ G)(x), (F \circ G)(y) \rangle = \langle F(G(x)), F(G(y)) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ unitär}}}{=} \langle G(x), G(y) \rangle =$$

$\overset{\uparrow}{=} \langle x, y \rangle$ für $x, y \in V$

G unitär

2) Assoziativgesetz geerbt aus Gruppe der Endomorphismen
3) $id \in U(V)$
4) Sei $F \in U(V)$. Dann gilt $F^* \circ F = id$, also $F^* = F^{-1}$, also auch $id = F \circ F^{-1} = F \circ F^* = (F^*)^* \circ F^*$, also ist $F^* = F^{-1}$ unitär. $\square$

<u>Definition</u> $U(\mathbb{C}^n)$ bzgl. Standard-IP heißt U_n „unitäre Gruppe der Ordnung n"
$U(\mathbb{R}^n)$ — " — O_n „orthogonale Gruppe der Ordnung n"

$SU_n = \{ F \in U_n \mid \det F = 1 \}$ „spezielle unitäre Gruppe der Ordnung n"
$SO_n = \{ F \in O_n \mid \det F = 1 \}$ „spezielle orthogonale Gr. der Ordnung n"

Wie sehen O_2 und SO_2 aus?

Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2$.

$\checkmark\ a^2+b^2=1$ Kreis Winkel

$\checkmark\ c^2+d^2=1$

$ac+bd=0.$

setze $a=\cos\varphi$ $\quad c=\sin\psi$ $\quad -\pi\le\varphi\le\pi$

$b=-\sin\varphi$ $\quad d=\cos\psi$ $\quad -\pi<\psi\le\pi$

$$0=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi=\sin(\varphi+\psi) \qquad -2\pi<\varphi+\psi\le 2\pi$$

$$\Rightarrow \varphi+\psi\in\{-\pi,0,\pi,2\pi\}$$

$$\psi\in\{-\pi-\varphi,-\varphi,\pi-\varphi,2\pi-\varphi\}$$

Fall 1. $\psi\in\{-\varphi,2\pi-\varphi\}$ $\qquad c=-\sin\varphi$, $d=\cos\varphi$

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}}_{\det(\ )=1}$$

Drehung um φ im math. pos. Sinn.

Fall 2 $\quad \psi \in \{-\pi-\varphi, \pi-\varphi\}$ $\quad c = -\sin\varphi$

$d = -\cos\varphi$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Drehung} \\ \det(\ )=1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Spiegelung an } x\text{-Achse,} \\ \det(\ )=-1}}$$

Satz 4.3. $\quad O_2$ = Drehungen + Spiegelungen

SO_2 = Drehungen

Beweis siehe oben.

Proposition Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $U \in U_m$, $V \in U_n$. Dann gilt

$$\|A\|_2 = \|UAV\|_2$$

Beweis

$\|Uz\|_2 = \|z\|_2$

$$\|UAV\|_2 = \max\{\|U(AVx)\|_2 \mid \|x\|_2 = 1\} = $$

$$= \max\{\|A(Vx)\|_2 \mid \|Vx\|_2 = 1\}$$

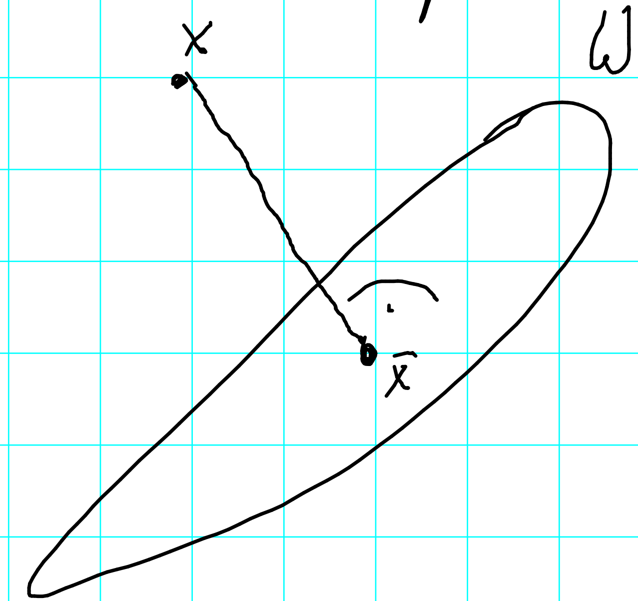
2x unit. Matrizen längentreu

$$= \max_{\text{V bijektiv}} \{ \|Ay\|_2 \mid \|y\|_2 = 1 \} = \|A\|_2$$

$\square$

25.3.2010

4.3. Projektionen



Definition. Sei $W \leq V$, V ein IPR, $x \in V$. Ein Element $\bar{x} \in V$ heißt (orthogonale) Projektion von x auf W, wenn

- $\bar{x} \in W$
- $x - \bar{x} \in W^\perp$

Bemerkung

$$x - \bar{x} \in W^\perp \iff \forall w \in W: \langle x - \bar{x}, w \rangle = 0$$
$$\iff \forall w \in W \quad \langle x, w \rangle - \langle \bar{x}, w \rangle = 0$$
$$\iff \forall w \in W \quad \langle x, w \rangle = \langle \bar{x}, w \rangle.$$

Proposition. Sei $W \leq V$, V IPR, $x \in V$. Dann gibt es höchstens eine Projektion von x auf W.

Beweis. Annahme: $\bar{x}$ und $\bar{\bar{x}}$ sind Projektionen von x auf W.

$\Rightarrow \bar{x} \in W, \bar{\bar{x}} \in W \Rightarrow \bar{x} - \bar{\bar{x}} \in W$

$x - \bar{x} \in W^\perp \quad x - \bar{\bar{x}} \in W^\perp \overset{W^\perp}{\Longrightarrow} (x - \bar{\bar{x}}) - (x - \bar{x}) = \bar{x} - \bar{\bar{x}} \in W^\perp$

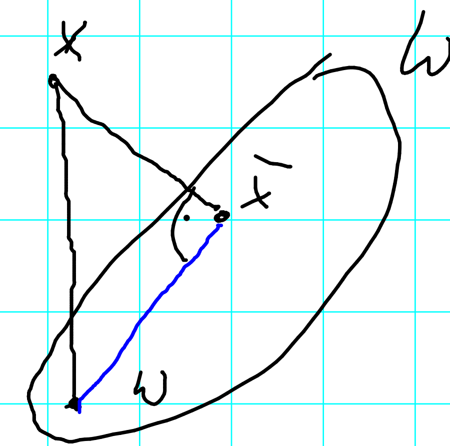
$$\Longrightarrow \quad \bar{x} - \bar{\bar{x}} \in W \cap W^\perp = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \bar{x} - \bar{\bar{x}} = 0 \qquad \square$$

<u>Satz 4.4 (Kürzester Abstand ist Normalabstand).</u> Sei $W \overset{\text{IPR}}{\leq} V$, $x \in V$, $\bar{x}$ Projektion von x auf W. Dann gilt

$$\|x - \bar{x}\| = \min \left\{ \|x - w\| \;\middle|\; w \in W \right\}$$

<u>Beweis.</u> Da $\bar{x} - w \in W$, gilt lt. Definition $\langle \bar{x} - w, x - \bar{x} \rangle$



Pythagoras.

$$\|x - w\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \underbrace{\|\bar{x} - w\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - \bar{x}\|^2$$

$\square$

<u>Bemerkung.</u> Das stellt die Verbindung zwischen IP und Orthogonalität einerseits und Approximationsproblemen (approximiere $x \in V$ bestmöglich durch ein Element $\in W$) her.

(Unter welchen Voraussetzungen) gibt es Projektion?

$\bar{x} \in W$ $\quad \langle x, w \rangle = \langle \underset{P(x)}{\underset{\|}{\bar{x}}}, w \rangle$ für alle $x \in V$, $w \in W$

$\leftarrow$ in der ~~Hoffnung~~, dass es so eine Abb. $P: V \to W$ gibt

Damit das so aussieht wie adjungierte Abbildungen, führen wir die Abbildung $i: W \to V$ $\quad w \mapsto w$ $\quad i \dots$ Inklusionsabbildung.

Wir suchen also Abb. $P: V \to W$, sodass

$$\forall x \in V \; \forall w \in W: \qquad \langle x, i(w) \rangle = \langle P(x), w \rangle$$

Wir suchen also die zu $i: W \to V$ adjung. Abb. $P: V \to W$.

<u>Satz 4.5.</u> (Existenz und Formel für Projektion) Sei V ein IPR, $W \leq V$, $\dim W < \infty$. Dann gibt es eine Abbildung $P_W: V \to W$ und jedes x auf seine Projektion $\bar{x} = P_W(x)$ abbildet. Diese ist durch

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j w_j \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \left(\langle w_j, w_k \rangle \right)^{-1}_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq d}} \begin{pmatrix} \langle w_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle w_d, x \rangle \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $(w_1, \dots, w_d)$ eine Basis von W ist.

<u>Beweis</u>, Das folgt alles aus Satz 4.1 und obigen Überlegungen $\square$

Korollar 1. Wenn in der Situation von Satz 4.5 $(w_1, \dots, w_d)$ eine Orthogonal-basis von W ist, so folgt

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\langle w_j, x\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} w_j.$$

Beweis. $\langle w_j, w_k\rangle = 0$ für $j \neq k$.

$$\left(\langle w_j, w_k\rangle\right)_{\substack{1\leq j\leq d\\ 1\leq k\leq d}}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\langle w_1, w_1\rangle, \dots, \langle w_d, w_d\rangle\right)^{-1} =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\langle w_1, w_1\rangle}, \dots, \frac{1}{\langle w_d, w_d\rangle}\right).$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle w_1, x\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle w_d, x\rangle}{\langle w_d, w_d\rangle} \end{pmatrix} \qquad P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\langle w_j, x\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} \cdot w_j$$

$\square$

Korollar 2 Wenn $(w_1, \dots, w_d)$ sogar Orthonormalbasis von W ist, so folgt

d

$$P_W(x) = \sum_{j=1} \langle w_j, x \rangle w_j .$$

<u>Beweis</u>. Alle Nenner sind 1. $\square$

<u>Beispiel</u>. $C[-\pi,\pi]$ stetige reellwertige Funktionen auf $[-\pi,\pi]$;

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

$$W_N = \operatorname{span}\left(\{\cos(nx) \mid 0\le n\le N\} \cup \{\sin(nx) \mid 1\le n\le N\}\right)$$

.... die hier stehenden Erzeuger sind Orthogonalbasis von W_N

Wir möchten ein $f\in C[-\pi,\pi]$ durch „trigonometrische Polynome" (Elemente aus W_N) approximieren, und zwar (der Einfachheit halber) im Sinne der 2-Norm

$$\|f-\bar f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-\bar f(x))^2\,dx}$$

$$\bar f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nx + \sum^{N} b_n \sin nx, \text{ wobei}$$

$$a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)^2\,dx} \qquad n=1$$

$$b_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x)\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)^2\,dx}$$

$N \to \infty$ ... konvergiert das ??

Analysis: unter richtigen Voraussetzungen schon.

„Fourier-Reihen"

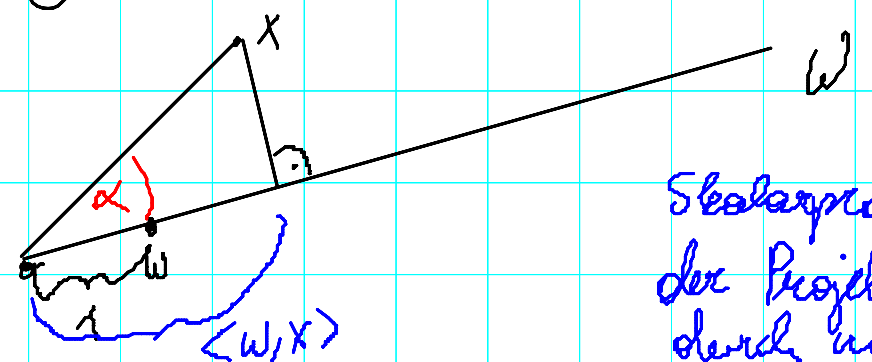
<u>Korollar 3</u>. Wenn $W = \mathrm{span}(w)$ mit $\|w\| = 1$, so folgt

$$P_W(x) = \langle w, x \rangle w$$

<u>Beweis</u> ~~nicht~~ das ist Spezialfall von Korollar 2 $\square$

$$\cos\alpha = \frac{\|P_W(x)\|}{\|w\|\,\|x\|} = \frac{\langle w, x\rangle}{\|w\|\,\|x\|}$$

2. Beweis für Korollar 3



Skalarprodukt = Länge der Projektion auf durch normierten Vektor gg. Unterraum.

auch Korollar 1 hätte man direkter ableiten können; wenn man nur dieses beweisen will, kommt man ohne adjungierte Abb aus, ohne Satz 4.5 ...

<u>Korollar 4</u>. Sei V IPR, $W \subseteq V$ mit $\dim W < \infty$. Dann gilt

$$V = W \oplus W^\perp$$

und

$$P_W + P_{W^\perp} = \mathrm{id}$$

<u>Beweis</u>. Da W endlich-dim, gibt P_W.

$$P_W(x) \in W$$
$$x - P_W(x) \in W^\perp$$

$$x = \underbrace{P_W(x)}_{\in W} + \underbrace{(x - P_W(x))}_{\in W^\perp}$$

$\Rightarrow$ $V = W + W^\perp$ und wir wissen aus Abschnitt 3.4, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$, woraus $V = W \oplus W^\perp$ folgt.

<u>Bem</u> $x - P_W(x)$ ist Proj. auf $W^\perp$.

Bew. $x - P_W(x) \in W^\perp$ ✓

$x - (x - P_W(x)) = P_W(x) \in W^{\perp\perp}$ ✓ □

Wie bekommen wir Orthogonalbasis eines Teilraums $W = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_d\}$?
Wir konstruieren eine solche schrittweise:

Sei $w_1, \dots, w_{d-1}$ eine Orthogonalbasis von $W' = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$.
Wir wollen diese zu Orthogonalbasis von W ergänzen.

Fall 1. $W' = W$. nichts zu tun.

Fall 2 $W \neq W'$, also insbes. $v_d \notin W'$.

Es gilt lt Korollar 4

$$\underbrace{v_d}_{\in W \setminus W'} = \underbrace{P_{W'}(v_d)}_{\in W'} + \underbrace{P_{W'^\perp}(v_d)}_{\neq 0} =: w_d$$

Da $w_d \in W'^\perp$, gilt $\langle w_j, w_d \rangle = 0$ für $j \in \{1, \dots, d-1\}$
$w_d \neq 0$.

Da $w_1, \ldots, w_{d-1}, v_d$ eine Basis von W waren, ist auch
$w_1, \ldots, w_{d-1}, w_d$ eine Basis von W.

$$w_d = v_d - P_{W'}(v_d) = v_d - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\langle w_j, v_d \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$$

Korollar 5 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren).

Seien V ein IPR mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ und

$$w_d = v_d - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\langle w_j, v_d \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j \qquad \text{für } 1 \leq d \leq n,$$

so ist $w_1, \ldots, w_n$ eine Orthogonalbasis von V.

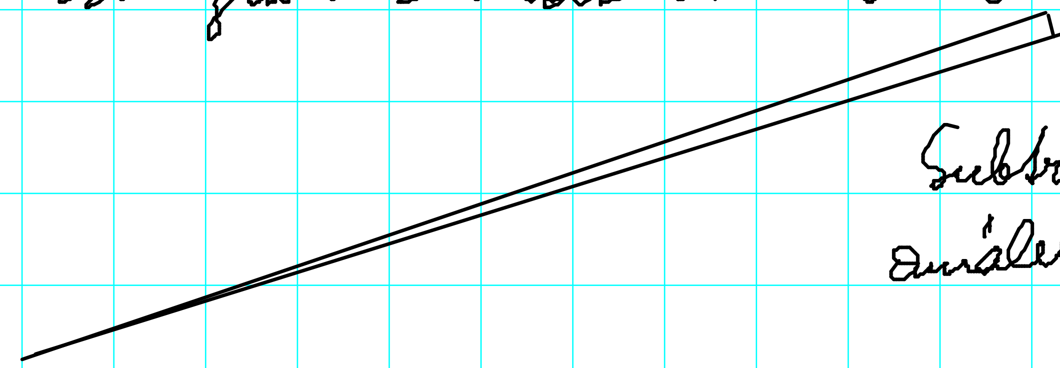
Beweis: viele obige Überlegungen.

Bemerkung 1) Korollar 5 besagt insbesondere, dass es in endl.-dim IPR immer eine Orthogonalbasis gibt.

2) Für Orthonormalbasis entweder Endresultat normieren

oder in jedem Schritt normieren

3) Numerisch ist Gram-Schmidt nicht immer stabil:



Subtraktion zweier annähernd gleicher Vektoren.

19.4.2010

Wir versuchen, die allg. Formel für die Projektion

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j w_j \text{ , wobei } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \left(\langle w_j, w_k \rangle \right)^{-1}_{\substack{1\le j\le d \\ 1\le k\le d}} \begin{pmatrix} \langle w_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle w_d, x\rangle \end{pmatrix}$$

(Satz 4.5) im Fall des $\mathbb{K}^n$ und Standard-IP. kompakter zu schreiben.

Schreibe Basisvektoren $w_1, \dots, w_d$ als Spalten in eine Matrix

$$A = (w_1, \dots, w_d)$$

$$\Rightarrow \quad P_W(x) = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix}$$

$\langle w_j, w_k \rangle = w_j^* w_k$

j-te Zeile von A^* — k-te Spalte von A

$\left(\langle w_j, w_k \rangle \right)_{\substack{1 \le j \le d \\ 1 \le k \le d}} = A^* A$

(genau das passiert bei Matrizenmultiplikation).

$\langle w_j, x \rangle = w_j^* x = \left(A^* x \right)_j$

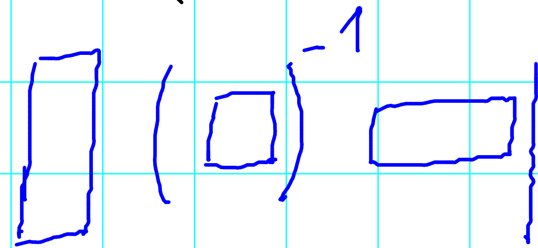
j-te Zeile von A^*

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \left(A^* A \right)^{-1} \cdot A^* x .$$

insgesamt: $P_W(x) = A \left(A^* A \right)^{-1} A^* x$

<u>Korollar 6</u> Sei $W \subseteq \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^n$ mit Standard-IP, $w_1, \ldots, w_d$ eine Basis von W, $A = \left(w_1 \ldots w_d \right) \in \mathbb{K}^{n \times d}$. Dann gilt

$$P_W(x) = A\,(A^*A)^{-1}\,A^*x$$



<u>Bemerkung</u>

- Nur neue Verpackung für altes Resultat, aber manchmal (Computer) bequemer.
- Es ist meist vernünftiger, eine Orthogonalbasis von W zu bestimmen
- Wer die Inverse ausrechnet, ist selber schuld: löse besser GLS

$$(A^*A)\,c = A^*x$$

Welche Eigenschaften machen eine lin. Abb. zu einer Projektion?

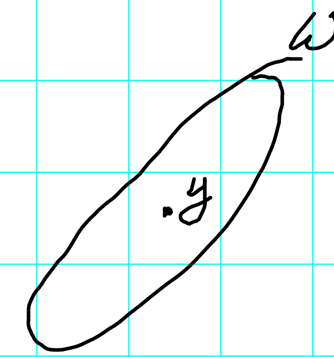
<u>Satz 4.6. (Charakterisierung von Projektionsabbildungen)</u>

Sei V ein IPR, $P: V \to V$ linear, $W = \operatorname{Im} P$.
Dann ist P genau dann gleich der Projektionsabbildung P_W, wenn

1) $P^2 = P$ „P ist idempotent"

2) $P^* = P$ „P ist selbstadjungiert".

Bemerkung. Wir sehen hier P und P_W als Abbildungen von V nach V (im Gegensatz zum obigen Standpunkt (vor Satz 4.5.), wo $P_W : V \to W$ gesehen wurde)
Achtung: damit P^* bzw. P_W^* auch $V \to V$.



Beweis „$\Rightarrow$" Für $y \in W$ gilt:

$$\left.\begin{array}{r} y \in W \\ y - y = 0 \in W^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow y = P_W(y).$$

Für $x \in V$ gilt also

$$P_W^2(x) = P_W\big(\underbrace{P_W(x)}_{\in W}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{obige Überl.}}}{=} P_W(x) \qquad \Rightarrow P_W^2 = P_W.$$

Für $x \in V$ und $y \in V$ gilt

$$\langle P_W^*(x), y\rangle \underset{\text{adj. Abb.}}{=} \langle x, \underbrace{P_W(y)}_{\in W}\rangle \underset{\substack{\text{Bem. nach Def}\\ \text{am Anfang dieses Abschnitts}}}{=} \langle \underbrace{P_W(x)}_{\in W}, P_W(y)\rangle = \langle P_W(x), y\rangle$$

Lemma aus Abschnitt 4.1

$\Longrightarrow$ $P_W^*(x) = P_W(x)$ für alle $x \in V$ ✓

„$\Longleftarrow$" Sei jetzt P ein Endomorphismus mit den angeg. Eigenschaften.

Zu zeigen: $\forall x \in V$: $P(x) \in W$ (ok, weil $\operatorname{Im} P = W$)

$\forall x \in V$: $x - P(x) \in W^\perp \Longleftrightarrow \forall x \in V\ \forall y \in W\ \langle x, y\rangle = \langle P(x), y\rangle$

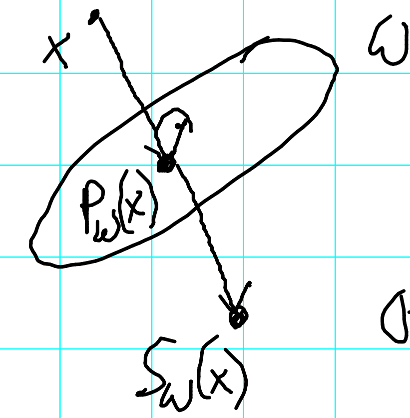
Seien also $x \in V$, $y \in W$. Dann gibt es wegen $W = \operatorname{Im} P$ ein $z \in V$ mit $y = P(z)$.

$$\langle P(x), y\rangle \underset{P=P^*}{=} \langle P^*(x), y\rangle \underset{\text{adj. Abb.}}{=} \langle x, P(y)\rangle =$$

$$= \langle x, P(P(z))\rangle = \langle x, P^2(z)\rangle \underset{P^2=P}{=} \langle x, P(z)\rangle = \langle x, y\rangle$$

$\square$

4.4. Spiegelungen



$$S_W(x) - P_W(x) = P_W(x) - x$$

$$\Longleftrightarrow S_W(x) = 2P_W(x) - x.$$

Definition: Sei V ein IPR, $W \leq V$. Dann definiere

$$S_W(x) = 2P_W(x) - x.$$

(wobei vorausgesetzt wird, dass P_W existiert, also z.B. $\dim W < \infty$)

Welche Eigenschaften machen aus einer lin. Abb. $F: V \to V$ eine Spiegelung?

Satz 4.7 (Charakterisierung von Spiegelungen) Sei V ein IPR, $W \leq V$, $S: V \to V$ linear. Dann ist $S = S_W$ genau dann, wenn

1) $S^2 = id$ „S ist involutorisch"
2) S ist unitär, also $S^* S = id$.
3) $W = \{x \in V \mid S(x) = x\}$.

Beweis „$\Rightarrow$" Beh. $P_W(S_W(x)) = P_W(x)$.

Bew.

$$\left.\begin{array}{l} P_W(x) \in W \\ \underbrace{S_W(x) - P_W(x) = P_W(x) - x}_{\text{Def Sp.}} \in W^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow P_W(x) \text{ ist Projektion von } S_W(x) \text{ auf } W \quad \boxed{\text{Beh.}}$$

$P_W(x)$ ist Proj.-

$$S_W(S_W(x)) = 2P_W(S_W(x)) - S_W(x) = 2P_W(x) - (2P_W(x) - x) = x$$

$$\Longrightarrow S_W^2 = \mathrm{id}. \quad \checkmark$$

$$S_W^*(x) = (2P_W - \mathrm{id})^*(x) = (2P_W^* - \mathrm{id}^*)(x) =$$

$$\underset{\text{Proj. selbstadj}}{=} (2P_W - \mathrm{id})(x) = S_W(x)$$

$\Longrightarrow S_W^* = S_W$ (S_W ist selbstadjungiert)

$S_W^* S_W = S_W^2 = \mathrm{id}$ $\Longrightarrow$ „S_W ist unitär". $\checkmark$

$$S_W(x) = x \iff 2P_W(x) - x = x \iff 2P_W(x) = 2x \iff P_W(x) = x \overset{\text{Def proj}}{\Longrightarrow} x \in W$$

$\Longleftarrow$ Überleg. am Beginn des Beweises von Satz 4.6. $\checkmark$

„$\Longleftarrow$" Wir setzen $P(x) = \frac{S(x) + x}{2}$ $(\iff S(x) = 2P(x) - x)$ und müssen zeigen, dass $P(x) = P_W(x)$.

Beh. $P(x) \in W$.

Bew.

$$S(P(x)) = S\left(\frac{S(x)+x}{2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ S \text{ ist} \\ \text{linear}}}{=} \frac{1}{2}\Big(S(S(x)) + S(x)\Big) = \frac{S^2(x)+S(x)}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ S \text{ involutor}}}{=} \frac{x+S(x)}{2} = P(x).$$

$\Rightarrow P(x) \in W$ $\boxed{\text{Beh.}}$

Beh. $\forall x \in V \ \forall y \in W: \quad \langle P(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\langle P(x), y \rangle = \left\langle \frac{S(x)+x}{2}, y \right\rangle = \frac{1}{2}\langle S(x), y \rangle + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle =$$

$$\underset{\substack{y \text{ inv. unter} \\ S}}{=} \frac{1}{2}\langle S(x), S(y) \rangle + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ S \text{ unitär}}}{=} \frac{1}{2}\langle x, y \rangle + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$\boxed{\text{Beh.}}$

$\square$