26.4.2010

Teil III Eigenwerte

Kapitel 6. Eigenwerte über allgemeinen Körpern

In diesem Kapitel ist K ein beliebiger Körper, außer in den Beispielen werden keine Eigenschaften der reellen/komplexen Zahlen verwendet, also auch keine Normen, inneren Produkte usw.

6.1 2 Beispiele zur Motivation

Beispiel 1. $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy = 1 \}$ $\qquad y = \frac{1}{2x}$.

(vgl. Diskussion bei Sylvesterschen Trägheitssatz, Ü 35c ...)

Schreibe das als

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Möchte das in Hauptlage überführen:

$$u^2 + v^2 = 1 \qquad \text{„Ellipse"}$$

$$\overline{a^2} \qquad b^2$$

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1 \qquad \text{„Hyperbel"}$$

$$v^2 = 2pu \qquad \text{„Parabel"}$$

a, b, p Parameter; u, v Variablen.

Wir möchten Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bestimmen, sodass $(x \;\; y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ in dieser Hauptform transformiert wird.

$$(x \;\; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left(Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)^t = (u \;\; v)\, Q^t$$

Setze ein:

$$(u \;\; v)\, Q^t A\, Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1.$$

Besonders nett wäre es, wenn

1) Q orthogonal $\leftarrow$ Geometrie
2) $Q^t A Q$ diagonal wäre $\leftarrow$ Hauptform

also $\quad Q^t A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad\quad Q^t = Q^{-1}.$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A Q = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Benenne die Spalten von Q als $\quad Q = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A z_1 & A z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 & \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}$$

$$A z_1 = \lambda_1 I z_1 \qquad\qquad A z_2 = \lambda_2 I z_2$$

$$A z_1 - \lambda_1 I z_1 = 0 \qquad\qquad A z_2 - \lambda_2 I z_2 = 0$$

$$(A - \lambda_1 I) z_1 = 0 \qquad\qquad (A - \lambda_2 I) z_2 = 0.$$

$z_1 = 0$ bzw. $z_2 = 0$ würden diese Gleichungen zwar lösen interessieren uns aber nicht: z_1 und z_2 sollen Spalten einer orthogonalen Matrix sein, also sicher keine Nullvektoren.

Also muss $A-\lambda_1 I$ (und $A-\lambda_2 I$) singulär sein;

also $\det(A-\lambda_1 I)=0$ $\qquad\qquad$ $\det(A-\lambda_2 I)=0$.

$$\left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda_1 & 1\\ 1 & -\lambda_1\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda_1^2-1=0 \qquad\qquad \lambda_2^2-1=0$$

$\lambda_1=1$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2=-1,$ $\quad \Rightarrow$ Hyperbel

$u^2-v^2=1$ $\qquad\qquad$ $a=b=1,$

$$(A-I)z_1=0 \qquad\qquad (A+I)z_2=0$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}z_1=0 \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}z_2=0.$$

$z_1 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $z_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normierung, brauchen normierte Vektoren

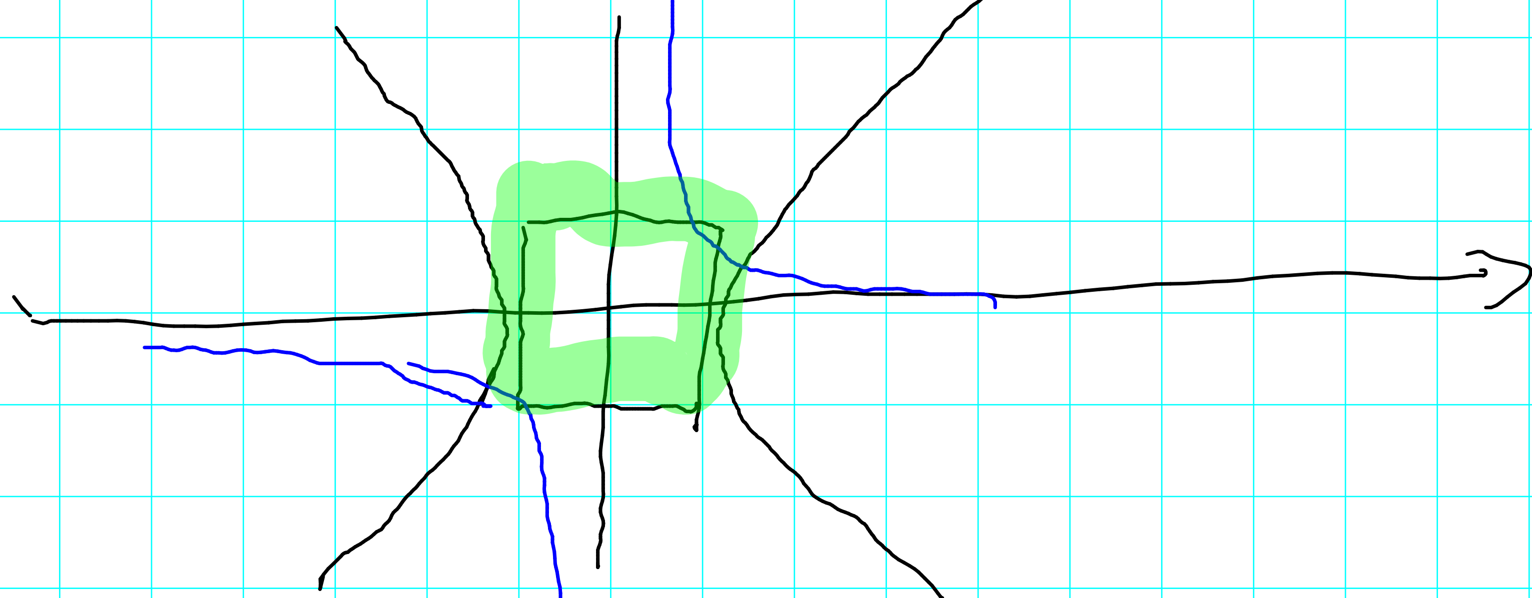
willkürliches Vorzeichen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$ = Drehung um 45° math. pos

u v – Welt $\qquad$ $u^2 - v^2 = 1$

x y – Welt: $\qquad$ um 45° math. pos. gedreht.

tatsächlich eine Orthogonale Matrix (kein Zufall, vgl. Kap 7).



Beispiel 2. Hühner-Füchse-Modell aus Einführung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix}}_{z_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -c & 1.2 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \underbrace{\begin{pmatrix} F_n \\ H_n \end{pmatrix}}_{z_n}$$

gekoppeltes System.

$$z_{n+1} = A\, z_n.$$

Versuche Entkopplung durch neue Koordinaten,

Ansatz:

$$z_n = T\, u_n \qquad T \text{ regulär, fest,}$$

$$T u_{n+1} = A \cdot T u_n \qquad \Big|\; T^{-1} \cdot$$

$$u_{n+1} = \underbrace{T^{-1} A T}_{\text{Diagonalmatrix}}\, u_n \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$$u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = \lambda_1 x_n$$
$$y_{n+1} = \lambda_2 y_n$$

entkoppelt.

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \lambda_1^{n+1} x_0$$
$$y_{n+1} = \lambda_2^{n+1} y_0$$

x_n, y_n explizit (λ_1, λ_2 müssen noch berechnet werden, x_0, y_0 bekannt sein).

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A T = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

weiter wie in Bsp 1, aber ohne Orthogonalität.
(brauche ich nicht, bekomme ich i.A. auch nicht).

6.2. Eigenwerte und Eigenvektoren.

Definition. Sei V ein K-Vektorraum, $F: V \to V$ ein Endomorphismus, $\lambda \in K$. Dann heißt λ ein Eigenwert von F, wenn es ein $x \neq 0$, $x \in V$ gibt, sodass

$$F(x) = \lambda x.$$

Ein solches x heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ von F.
Die Menge aller Eigenwerte von F

$$\sigma(F) = \{ \lambda \in K \mid \lambda \text{ ist EW von } F \}$$

heißt das Spektrum von F.

Bemerkungen.

- $x = 0$ würde die Eigenvektor-Eigenwert-Gleichung auch erfüllen, dann wäre jedes λ EW und das wäre fad.
- Wenn F kein Endomorphismus wäre, aber linear $V \to W$ wäre, dann müsste x aus V und aus W sein, ... sinnlos.
-

Definition Sei $A \in K^{n \times n}$, λ heißt EW von A, wenn λ EW von

$F_A : K^n \to K^n ;\ x \mapsto Ax$" ist, also es ein $x \neq 0$ gibt, sodass

$$Ax = \lambda x$$

<u>Beispiel 3</u>. Sei $A \in K^{n \times n}$ Diagonalmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

gilt z.B gut, wenn $x = e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k_j$.

und $\lambda = a_j$.

d.h. jedes a_j ist EW; $x = e_j$ ist zugeh. EV.

es könnte mehr geben, aber das können wir bald behandeln.

<u>Beispiel 4</u>. $C^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ beliebig oft differenzierbar} \}$

$D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}); \quad f \mapsto f'$ (Differentiation)

D ist Endomorphismus

EW-EV Glg also

$$D(f) = \lambda f,$$
$$f' = \lambda f.$$
$$\frac{f'}{f} = \lambda$$
$$\left(\ln|f|\right)' = \lambda$$
$$\ln|f(x)| = \lambda x + \tilde{C}$$
$$|f(x)| = e^{\lambda x + \tilde{C}}$$
$$|f(x)| = e^{\tilde{C}} e^{\lambda x}$$
$$f(x) = \underbrace{\pm e^{\tilde{C}}}_{\overset{!!}{=} C} e^{\lambda x}$$
$$f(x) = C \cdot e^{\lambda x}.$$

Somit ist jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert des Differentiations-operators; $e^{\lambda x}$ sind zugehörige Eigenvektoren (und heißen hier Eigenfunktionen).

<u>Definition</u>. Sei $F: V \to V$ ein Endomorphismus, λ ein EW von F. Dann heißt

$$V_\lambda(F) = V_\lambda = \{ x \in V \mid F(x) = \lambda x \}$$

der Eigenraum von F zum EW λ.

<u>Bem</u>. Eigenraum = Menge der EV $\cup$ $\{0\}$

<u>Proposition</u> Mit obigen Bezeichnungen ist $V_\lambda(F)$ ein Untervektorraum von V. Genauer gilt

$$V_\lambda(F) = \operatorname{Ker}(F - \lambda \, id)$$

<u>Beweis</u>.

$$x \in V_\lambda \iff F(x) = \lambda x \iff F(x) - \lambda x = 0 \iff$$
$$\iff F(x) - \lambda \, id(x) = 0 \iff (F - \lambda id)(x) = 0$$
$$\iff x \in \operatorname{Ker}(F - \lambda id) \implies V_\lambda = \operatorname{Ker}(F - \lambda id)$$

Daher ist V_λ ein UVR (vgl. LinAlg 1). $\square$

<u>Definition.</u> Mit diesen Bezeichnungen setze

$$\varrho_F(\lambda) = \varrho(\lambda) = \dim V_\lambda ,$$

die geometrische Vielfachheit von λ als EW von F.

<u>Proposition.</u> Sei V ein K-VR, $F: V \to V$ ein Endomorphismus, $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\lambda \text{ ist EW von } F \iff \ker(F - \lambda\, \mathrm{id}) \neq \{0\}$$
$$\iff F - \lambda\, \mathrm{id} \text{ ist nicht injektiv.}$$

<u>Beweis</u> siehe oben (+ Def) $\square$

6.3. Charakteristisches Polynom

LinAlg 1. Det. eines Endomorphismus (eines endl.-dim. Raumes) ist Determinante irgendeiner
Def. nach Korollar darstellenden Matrix (und hängt nicht von gewählter Basis

6 im Abschnitt 4.3) ab)

Definition. Sei V endl.-dim. K-Vektorraum, $F: V \to V$ ein Endomorphismus, t eine Unbestimmte über K. Dann heißt

$$p_F(t) = \det(F - t\,id)$$

das charakteristische Polynom von F.

Ist das überhaupt ein Polynom?

Wähle irgendeine Basis B von V; A Matrixdarst. von F bzgl B.

$A - tI$ ist Matrixdarst. von $F - t\,id$

$$p_F(t) = \det(F - t\,id) = \det(A - tI) =$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^{n} \big(\underbrace{a_{j\sigma(j)} - t\,\delta_{j\sigma(j)}}_{\in K[t] \quad \text{grad} \in \{0,1\}}\big)}_{\in K[t] \quad \text{Grad} \leq n}}_{\in K[t] \quad \text{grad} \leq n}$$

δ … Kronecker-Delta

$p_F(t)$ ist also ein Polynom vom Grad $\le n$ in der Variablen t

Bestimme Koeffizienten von t^n folgendermaßen:

$$p_F(t) = \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (a_{jj} - t)}_{\text{Summand } \sigma = \mathrm{id}} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \left(a_{j\sigma(j)} - t\,\delta_{j\sigma(j)}\right)$$

Jede Permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$ besitzt ein j mit $\sigma(j) \neq j$ und damit auch $\sigma(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$, also höchstens $n-2$ mal $\sigma(k) = k$.

$$\deg\left(\qquad\right) \le n-2.$$

$$\Rightarrow \quad p_F(t) = (-t)^n + (-t)^{n-1} \cdot (a_{11} + \dots + a_{nn}) + (\text{Polynom vom Grad} \le n-2)$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \underbrace{tr(A)}_{=:\, tr(F)} t^{n-1} + \text{———}\,//\,\text{———}.$$

$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(F)\, t^{n-1} +$ ——— // ———

Konstanter Koeff. $= p_F(0) = \det F$.

Proposition: Sei $F: V \to V$ ein Endomorphismus, V endl.-dim, $\dim V = n$,
Dann ist $p_F(t)$ ein Polynom vom Grad n; es gilt

$$p_F(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(F)\, t^{n-1} + \ldots + \det F.$$

Beweis siehe oben. $\square$

29.4.2010

Wir wissen: λ EW von $F \Leftrightarrow \ker(F - \lambda\, id) \neq \{0\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F - \lambda\, id$ singulär $\Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle von p_F.

Definition Sei $F: V \to V$ Endomorphismus, $\dim V < \infty$, $\lambda \in K$.
Die algebraische Vielfachheit $\mu_F(\lambda) = \mu(\lambda)$ von λ als Eigenwert von F ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von p_F, also das maximale k, sodass

$$p_F(t) = (t-\lambda)^k \, g(t)$$
für ein Polynom $g(t)$ geschrieben werden kann.

Satz 6.1. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Ein $\lambda \in K$ ist genau dann EW von F, wenn λ Nullstelle von $p_F(t)$.
Die Anzahl der Eigenwerte von F mit algebraischen Vielfachheiten (also $\sum_{\lambda \text{ EW von } F} \mu(\lambda)$) $\leq n$.

Falls p_F über K in Linearfaktoren zerfällt, so gilt Anzahl der Eigenwerte von F mit algebr. Vf $= n$

Beweis. Es steht eigentlich schon alles da; ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen (inkl. Vf).
Gleichheit genau im Fall von Zerfallen in Linearfaktoren. $\square$

Bemerkung. 1) p_F zerfällt über K in Linearfaktoren, wenn K „groß genug" ist; also z.B. für $K = \mathbb{C}$.

2) Über $\mathbb{R}$ kann es durchaus vorkommen, dass „zu wenige" EW auftreten.

$$
\begin{aligned}
p_F(t) &= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \cdot tr(F) + \ldots + \det F \\
&= (-1)^n (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) \ldots \ldots (t-\lambda_n) = \\
&= (-1)^n t^n + t^{n-1} (-1)^n (-\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n) + \\
&\quad + \ldots + (-1)^n (-\lambda_1)(-\lambda_2) \ldots (-\lambda_n) = \\
&= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) + \ldots + \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n
\end{aligned}
$$

(wenn p_F in Linearfakt. zerfällt).

<u>Proposition</u>. Sei V n-dim K-VR, $F: V \to V$ Endomorphismus, das char. Poly p_F zerfalle über K in Linearfaktoren, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien die EW von F entsprechend ihrer algebr. Vf wiederholt. Dann gilt

1) $tr(F) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

2) $\det(F) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

<u>Beweis</u>. siehe oben. $\square$

<u>Beispiel 5</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

EW? Vf? EV?

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 2 & 4-t \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. Spalte 1}}{=} (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & 4-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)\Big((1-t)(4-t) + 2\Big) = (2-t)\left(6 - 5t + t^2\right) =$$

$$= (2-t)(t-2)(t-3) = -(t-2)^2(t-3)^1.$$

$\lambda_1 = 2$ $\mu(2) = 2$ $\lambda_2 = 3$ $\mu(3) = 1$

Suche EV zum EW $\lambda_1 = 2$, also $\ker(A - 2I)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0$ $x_2 = 0$ $x_1 = s$

$$V_2 = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(2) = 1.$$

Suche EV zum EW $\lambda_2 = 3$, also $\operatorname{Ker}(A - 3I)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 2t$
$x_2 = -t$
$x_1 = -t$

$$V_3 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(3) = 1.$$

<u>Beispiel 6</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 0 \\ 2 & -t & 0 \\ 2 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\big(-t(3-t) + 2\big) = (1-t)\left(t^2 - 3t + 2\right) =$$

$$= (1-t)(t-1)(t-2) = -(t-1)^2(t-2)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \mu(1) = 2 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \mu(2) = 1$

EV zu $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{-1} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= 2s \\ x_1 &= s \end{aligned} \qquad V_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$g(1) = 2$.

EV zu $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= t \end{aligned} \qquad V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$g(2) = 1$.

__Beispiel 7.__

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad K = \mathbb{R}.$$

$$p_A(t) = t^2 + \underbrace{0}_{-\operatorname{tr} A} t + \underbrace{1}_{\det A} = t^2 + 1$$

über $\mathbb{R}$: $\quad p_A(t)$ zerfällt nicht; keine reellen Eigenwerte.

über $\mathbb{C}$: $\quad p_A(t) = (t-i)(t+i)$ $\qquad$ usw.

Proposition Sei $F: V \to V$ Endomorphismus, $\lambda \in \sigma(F)$. Dann gilt: (für $V \neq \{0\}$ $\leftarrow$ brauche)

1) Für $c \in K$ gilt $\quad c \cdot \lambda \in \sigma(cF)$
2) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\quad \lambda^m \in \sigma(F^m)$
3) F regulär $\Longleftrightarrow 0 \notin \sigma(F)$
4) Für $c \in K$ gilt $\quad \lambda + c \in \sigma(F + c\,\mathrm{id})$
5) Wenn F regulär, so ist $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(F^{-1})$
6) Wenn F idempotent, also $F^2 = F$, so $\sigma(F) \subseteq \{0,1\}$.
7) Wenn F nilpotent ist, also $\exists p \in \mathbb{N}: F^p = 0$, so ist $\sigma(F) = \{0\}$

Beweis. Sei x EV zum EW λ von F, also $F(x) = \lambda x$.

1) $cF(x) = c\lambda x$
2) $F^m(x) = F(F^{m-1}(x)) = F(\lambda^{m-1} x) = \lambda^{m-1} F(x) = \lambda^{m-1} \lambda x = \lambda^m x$
3) $0 \in \sigma(F) \Leftrightarrow F - 0 \cdot \mathrm{id}$ sing $\Leftrightarrow F$ singulär
4) $F(x) + c \cdot x = \lambda x + cx \Longleftrightarrow F(x) + c \cdot \mathrm{id}(x) = (\lambda + c)x \Longleftrightarrow (F + c \cdot \mathrm{id})(x) = (\lambda + c)x$
5) $x = F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(\lambda x) = \lambda F^{-1}(x) \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} x = F^{-1}(x)$.
6) $\lambda x = F(x) = F^2(x) = \lambda^2 x \Longrightarrow (\lambda^2 - \lambda)x = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$.
7) $\lambda^p x = F^p(x) = 0(x) = 0 \Longrightarrow \lambda^p = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$. $\quad \sigma(F) \subseteq \{0\}$.

OBdA sei p minimal, also $F^{p-1} \neq 0$, also gibt es ein x mit $F^{p-1}(x) \neq 0$,

$$0 \cdot F^{p-1}(x) = 0 = F^p(x) = F(F^{p-1}(x))$$

$\square$

<u>Proposition</u> Sei $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$, so gilt

1) $\lambda \in \sigma(A^t)$

2) Wenn T regulär und x EV zum EW λ, so gilt

$\lambda \in \sigma(T^{-1}AT)$,

$T^{-1}x$ ist EV zum EW λ von $T^{-1}AT$

3) Wenn A eine Dreiecksmatrix ist, so sind die Diagonalel. die EW von A mit ihren alg. Vf.

<u>Beweis.</u> 1) $\det(A - \lambda I) = 0 \implies 0 = \det((A - \lambda I)^t) =$

$= \det(A^t - \lambda I^t) = \det(A^t - \lambda I)$.

$\implies \lambda \in \sigma(A^t)$.

2) $\lambda \in \sigma(T^{-1}AT)$ eh klar, weil dieselbe lin Abb, aber direkte Rechnung spart Denken:

$(T^{-1}AT)(T^{-1}x) = T^{-1}Ax = T^{-1}\lambda x = \lambda(T^{-1}x)$ ✓

3) $\det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-t & & * \\ & a_{22}-t & \\ & & \ddots \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}-t)(a_{22}-t)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-t).$$

untere Dreiecksmatrix analog oder über 1) $\square$

Bemerkung. $\det(tI-A) = \det((-1)\cdot(A-tI)) = (-1)^n \det(A-tI) =$
$= (-1)^n p_A(t) = (-1)^n\left((-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr} A\, t^{n-1} + \ldots + \det A\right) =$

$$= t^n - \operatorname{tr}(A)\, t^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A.$$

manche definieren das char. Poly als $\det(tI-A)$.

Es gibt keinen Abschnitt 6.4.

6.5 Diagonalisierbarkeit

- Welche Endomorphismen können bei Wahl geeigneter Basen

durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden (und wie bekommt man diese?)
„Entkoppelung"

- (Wie) hängen algebraische und geometr. Vf. eines EW zusammen?

<u>Definition</u>. Sei V endl.-dim K-Vektorraum, $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Dann heißt F diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich der F durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

<u>Bemerkung</u> 1. F diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ Es gibt Basis $B=(x_1, \dots, x_n)$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, sodass F bzgl B durch $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dargestellt wird.

(dSddMsdKdBdBV)

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Basis $B=(x_1, \dots, x_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, sodass $\forall j$:

$$F(x_j) = 0x_1 + \dots + 0x_{j-1} + \lambda_j x_j + 0x_{j+1} + \dots + 0x_n = \lambda_j x_j$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Basis B von V, wobei jedes Basiselement EV ist

$\Longleftrightarrow$ V besitzt eine Basis von Eigenvektoren von F.

Bemerkung 2 Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn $F_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax$ diagonalisierbar ist.
$\Longleftrightarrow \exists\, T$ regulär : $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix.

Proposition. Sei $F: V \to V$ ein Endomorphismus, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von F; $x_1, \dots, x_r$ EV dazu, (x_j EV zum EW λ_j), dann sind $x_1, \dots, x_r$ l. u.

Beweis. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ mit

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0. \qquad (1)$$

Induktion nach r: $r = 1$ ✓

Wende F auf (1) an:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r x_r = 0 \qquad (2)$$

Multipliziere (1) mit λ_r

$$\alpha_1 \lambda_r x_1 + \alpha_2 \lambda_r x_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r x_r = 0 \qquad (3)$$

Subtrahiere (3) von (2):

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_r)x_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_r)x_2+\dots+\alpha_{r-1}(\lambda_{r-1}-\lambda_r)x_{r-1}=0.$$

Lt. Induktionsann. sind $x_1,\dots,x_{r-1}$ l.u., also

$$\alpha_1\underbrace{(\lambda_1-\lambda_r)}_{\neq 0}=\alpha_2\underbrace{(\lambda_2-\lambda_r)}_{\neq 0}=\dots=\alpha_{r-1}\underbrace{(\lambda_{r-1}-\lambda_r)}_{\neq 0}=0.$$

$$\Longrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{r-1}=0$$

Setze in (1) ein und erhalte

$$\alpha_r x_r=0 \Longrightarrow \alpha_r=0 \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u> Daraus folgt, dass

$$V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_r}$$

eine direkte Summe ist.

Proposition Sei $F: V \to V$ ein Endomorphismus, V endl. dim, $\lambda \in \sigma(F)$. Dann gilt

$$1 \leq \rho(\lambda) \leq \mu(\lambda).$$

Beweis. $\rho(\lambda) \geq 1$ ist aus Def. klar. Schreibe zur Abkürzung $\rho = \rho(\lambda)$ und wähle eine Basis

$$x_1, \ldots, x_\rho \quad \text{von } V_\lambda.$$

Ergänze $x_1, \ldots, x_\rho$ zu einer Basis

$$x_1, \ldots, x_\rho, x_{\rho+1}, \ldots, x_n \quad \text{von } V.$$

Betrachte Matrixdarstellung A von F bzgl. dieser Basis.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} F(x_1) & \cdots & F(x_\rho) & F(x_{\rho+1}) & \cdots & F(x_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & 0 & \\ & & \lambda & ? \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right) \end{array} =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} \lambda I_\rho & B \\ \hdashline \underbrace{0}_{\rho} & C \end{array}\right) \Big\}\rho$$

$$p_F(t) = \det(A - tI) = \det \left(\begin{array}{c:c} (\lambda - t) I_\rho & B \\ \hdashline 0 & C - tI_{n-\rho} \end{array}\right) =$$

$$= \det\big((\lambda - t) I_\rho\big) \det\big(C - tI_{n-\rho}\big) = (\lambda - t)^\rho \cdot 1 \cdot p_C(t),$$

$\Longrightarrow$ es gibt mind. ρ Faktor $(t - \lambda)$ in p_F, also

$$\mu_F(\lambda) = \rho + \mu_C(\lambda) \geq \rho .$$

$\square$

$F: V \to V$ linear.

singulär.

$r = \operatorname{rang} F < \dim V$

$F|_{\operatorname{Im} F}$ Endomorphismus, es gilt Jordankästchen Lf Vor.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}, \ldots, x_{1r_1} \\ x_{21}, \ldots, x_{2r_2} \\ \vdots \\ x_{p1}, \ldots, x_{pr_p} \end{array}\right\} \text{zum EW } 0$$

$\vdots$

$x_{k1}, \ldots, x_{kr_k}$ insgesamt r Vektoren

$F(x_{i1}) = \lambda(i)\, x_{i1}$ (EV) $\qquad F(x_{it}) = \lambda(i) x_{it} + x_{it-1}$

$x_{11}, \ldots, x_{p1}$ ist Basis von $\operatorname{Ker} F \cap \operatorname{Im} F$.

Ergänze das zu Basis $x_{11}, \ldots, x_{p1}, z_1, \ldots, z_{n-r-p}$ von $\operatorname{Ker} F$

Diese neuen Vektoren bilden ein-elementige Ketten zum EW 0 bzgl F:

$$F(z_1) = 0 = 0 \cdot z_1$$

$$\vdots$$

$$F(z_{n-r-p}) = 0 = 0 \cdot z_{n-r-p}.$$

Brauche noch p weitere Vektoren.

Wir wählen $y_1, \dots, y_p \in V$ so, dass $F(y_i) = x_{ir_i}$ $\quad 1 \leq i \leq p$.

Das ist möglich, weil $x_{ir_i} \in \mathrm{Im}(F)$.

Schreibe

$$F(y_i) = 0 \cdot y_i + x_{ir_i} \qquad \text{EW } 0, \text{ Vorgänger } x_{ir_i}$$

Neue Ketten:

$x_{11}, \dots, x_{1r_1}, y_1$

$x_{21}, \dots, x_{2r_2}, y_2$

$\vdots$

$x_{p1}, \dots, x_{pr_p}, y_p$

$x_{p+1,1}, \dots, x_{p+1\,r_{p+1}}$

$\vdots$

$x_{q1}, \dots, x_{qr_q}$

z_1

$\vdots$

z_{n-r-p}.

Das sind n-Vektoren, die Ketten bzgl. F bilden. Wenn diese Basis sind, hat F bzgl. dieser Basis Darstellung durch Jordanmatrix.

Wir beweisen also lineare Unabhängigkeit dieser n Vektoren.

Seien $\alpha_{ij}, \beta_i, \gamma_i$ Skalare mit

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{r_k} \alpha_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i y_i + \sum_{i=1}^{n-r-p} \gamma_i z_i = 0 \qquad (*)$$

Wende F auf $(*)$ an.

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{r_k} \alpha_{it} \Big(\lambda(i) x_{it} + \underbrace{[t>1]}_{\text{Wenn } t>1, \text{ dann } 1, \text{ sonst } 0} x_{i\,t-1} \Big) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_{ir_i} + \sum_{i=1}^{n-r-p} \gamma_i \cdot 0 = 0 \qquad (**)$$

Wo kommt in dieser Summe eigentlich x_{ir_i} vor? für $1 \le i \le p$

hier nicht.

β_i

0. $x_{i r_i}$ (ist kein Vorgänger in allen Ketten) $\uparrow$

(EW ist 0) einziges Vorkommen von $x_{i r_i}$

Lt. Induktionsannahme waren die x_{ij} l.u., $(**)$ ist Linkomb der x_{ij},

$\Longrightarrow \quad \beta_i = 0 \qquad$ für $1 \leq i \leq p$.

Wir schreiben $(*)$ mit dieser Information um:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{r_i} \alpha_{it} x_{it}}_{\in \operatorname{Im} F} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n-r-p} \gamma_i z_i}_{\in \operatorname{Ker} F} \in \operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F.$$

In $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F$ kennen wir eine Basis, nämlich $x_{11}, \dots, x_{p1}$.

$$\Longrightarrow \quad -\sum_{i=1}^{n-r-p} \gamma_i z_i = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i x_{i1} \qquad \text{für passende } \varepsilon_i$$

Alle Vektoren $z_1, \dots, z_{n-r-p}, x_{11}, \dots, x_{p1}$ bilden Basis von $\operatorname{Ker} F$

$\Longrightarrow \quad \gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{n-r-p} = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \ldots, \varepsilon_p = 0$

In (*) bleibt noch übrig

$$\sum_i \sum_t \alpha_{it} x_{it} = 0.$$

Da die x_{it} eine Basis von Im F sind, sind sie l.u. und es folgt

$\alpha_{it} = 0$ für alle i und t.

alles l.u. wie erhofft, Beweis für singuläres F fertig.

Sei jetzt F regulär. Sei λ ein Eigenwert von F.

$F - \lambda \mathrm{id}$ ist daher singulär.

Es gibt eine Basis von V, bzgl der $F - \lambda \mathrm{id}$ in Jordanform ist.

Addition von λI ergibt darst. Matrix von F, das ist noch immer Jordanmatrix.

$\square$

zu Beispiel 5:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \quad \mu(2) = 2 \quad g(2) = 1 \quad V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = 3 \quad \mu(3) = 1 \quad g(3) = 1 \quad V_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

nicht diagonalisierbar.

Jordanform
$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & \\ & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

\# Jordanblöcke pro EW ... geom. Vf.
Gesamtgröße der Jordanblöcke pro EW ... algebr. Vf

Was heißt das für zugehörige Basis x_1, x_2, x_3 ?
DSdM sd KdBdBv.

$F(x_1) = 2x_1$
$F(x_2) = 2x_2 + x_1$
$F(x_3) = 3x_3$

$\Rightarrow$ x_1 EV zum EW 2

$\Rightarrow$ x_3 EV zum EW 3

$$\Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)\, x_2 = x_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +1 \\ -2 \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] +2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)\, x_1 = 0$$

Basis $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 2010 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2010 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

<u>weiteres Bsp</u> $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $\lambda_1 = 1$ $\mu(1) = 4$ $\rho(1) = 2$

Jordanblöcke zum EW 1 haben Gesamtgröße 4

2 Jordanblöcke zum EW 1.

<u>Fall 1</u>

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$(A - I) x_1 = 0$

$(A - I) x_2 = x_1$

$(A - I) x_3 = 0$

<u>Fall 2</u>

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$(A - I) x_1 = 0$

$(A - I) x_2 = x_1$

$(A - I) x_3 = x_2$

$$(A-I)x_4 = x_3 \qquad\qquad (A-I)x_4 = 0.$$

$$(A-I)^2 x_j = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq 4. \qquad\qquad (A-I)^2 x_3 = x_1 \neq 0$$

$$(A-I)^2 = 0 \qquad\qquad (A-I)^2 \neq 0$$

Manchmal kann man durch Betrachten von $(A-I)^k$ für wachsende k bereits eine Entscheidung herbeiführen.

6.7. Anwendungen von Jordan-Zerlegung bzw. Diagonalisierung

6.7.1. Matrizenpotenzen.

Sei $A \in K^{n\times n}$, $k \in \mathbb{N}$. (oder symbolische Variable). Frage: Was ist A^k.

Jordanzerlegung: $T^{-1}AT = J$ T regulär, J Jordanmatrix

$\Rightarrow \quad A = T J T^{-1}$

also $\quad A^k = \underbrace{(T J \underbrace{T^{-1})(T}_{I} J T^{-1})(T J T^{-1}) \cdots (T J T^{-1})}_{k \text{ Faktoren}}$

$$= T J^k T^{-1}$$

Wir wollen J^k bestimmen

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

$$J^k = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_s}(\lambda_s)^k \end{pmatrix}$$

Es reicht, wenn man Jordan-Blöcke

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

potenzieren kann.

Schreibe $J_r(\lambda) = \lambda I + Z$ $\qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J_r(0)$

$$J_r(\lambda)^k = (\lambda I + Z)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda I)^{k-j} Z^j$$

ist das erlaubt?

(es gilt zwar der binomische Lehrsatz für Matrizen nicht, weil Matrizen i.A. nicht kommutieren.
Da aber $(\lambda I) Z = \lambda Z = \lambda Z I = Z(\lambda I)$, darf der binom. Lehrsatz hier trotzdem verwendet werden).

$$Ze_1 = 0 \qquad\qquad Z^2 e_1 = 0$$
$$Ze_2 = e_1 \qquad\qquad Z^2 e_2 = 0$$
$$Ze_3 = e_2 \qquad\qquad Z^2 e_3 = e_1$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$Ze_n = e_{n-1} \qquad\qquad Z^2 e_n = e_{n-2}$$

$$\Longrightarrow \; Ze_j = e_{j-1} \, [j>1] \qquad Z^2 e_j = e_{j-2} \, [j>2] \qquad Z^k e_j = e_{j-k} \, [j>k]$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad Z^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 1 & \\ & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

k. ND

1. ND

$$(J_r(\lambda))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} Z^j = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$j=0$ ... Hauptdiag $1 \cdot \lambda^k$

$j=1$ ... 1. Nebendiag. $k\,\lambda^{k-1}$

$j=2$ ... 2. ND $\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}$

j ... j-te ND $\frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}\lambda^{k-j} = \frac{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j \lambda^k}{j!}$ „Formale Differentiation"

<u>Satz 6.4</u>. Sei $A \in K^{n\times n}$ mit Jordanzerlegung

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

und $f \in K[t]$. Dann gilt

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(J_{r_1}(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_{r_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix} T^{-1}$$

und

$$f\left(J_r(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2} f''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} f^{(r-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} f''(\lambda) \\ & & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix} = \left(\frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!} [j \geq i] \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}.$$

Bem. Falls A diagonalisierbar ist, sind lauter 1×1 – Blöcke, also keine Nebendiag, keine Ableitungen usw.

6.7.2 Satz von Cayley-Hamilton

Korollar (Satz von Cayley-Hamilton) Sei $F: V \to V$ ein Endomorphismus,

V endl. dim., $p_F \in K[t]$ das char. Polynom von F.

Dann gilt $p_F(F) = 0$

Beweis. Wir wählen Basis, bezüglich der F durch die Jordanform

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

dargestellt wird,

$$p_F(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2} \cdots (t-\lambda_s)^{r_s}$$

Wie sieht eigentlich

$$(t-\lambda_j)^{r_j}\left(J_{r_j}(\lambda_j)\right)$$

aus?

$$\left(J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda_j I\right)^{r_j} = Z^{r_j} = 0$$

Übungsblatt LinAlg I 43 verwendet

$$p_F\left(J_{r_j}(\lambda_j)\right) = \left(J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda_1 I\right)^{r_1} \cdots \underbrace{\left(J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda_j I\right)^{r_j}}_{0} \cdots \left(J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda_s I\right)^{r_s}$$

$= 0$

$\square$

17.5.2010

geg: $F: V \to V$ Endomorphismus,
ges: alle Polynome $p \in K[x]$, sodass $p(F) = 0$.

Wir wissen (Cayley-Hamilton): $p_F(F) = 0$.
trivial: $0\,(F) = 0$

<u>Definition.</u> Sei $F: V \to V$ Endomorphismus, V endl.-dim.
Jenes normierte (Leitkoeffizient $=1$) Polynom minimalen Grades ≥ 0 $m \in K[X]$ mit $m(F) = 0$ heißt <u>Minimalpolynom</u> von F.

<u>Bemerkung</u> $(-1)^n p_F$ ist normiert und erfüllt lt. Cayley-Hamilton $(-1)^n p_F(F) = 0$, das wäre ein Kandidat; vielleicht gibt es aber Polynom kleineren Grades. $n = \dim V$.

<u>Proposition.</u> Sei $F: V \to V$ Endomorphismus, $m \in K[X]$ sein Minimalpolynom, dann gilt

$$\{p \in K[X] \mid p(F) = 0\} = \{m \cdot g \mid g \in K[X]\}$$

Insbesondere gilt m teilt p_F.

Beweis. „$\supseteq$": $(g\cdot m)(F) = g(F)\underbrace{m(F)}_{=0} = 0. \Longrightarrow g\cdot m \in$ linke Menge. ✓

„$\subseteq$": Sei $p \in$ linker Menge, also $p(F) = 0$.
Dividiere p durch m mit Rest, also

$$p = m \cdot q + r \qquad \text{mit } \deg r < \deg m.$$

Setze F ein:

$$\underbrace{p(F)}_{=0} = \underbrace{\underbrace{m(F)}_{=0} \cdot q(F)}_{=0} + r(F)$$

$\Longrightarrow r(F) = 0.$ Wegen der Minimalität des Grades von m folgt $r = 0$. Also war die Division doch ohne Rest, also p ein Vielfaches von m, was zu zeigen war. ✓

Wegen Cayley-Hamilton folgt $m \mid p_F$. $\square$

Wenn p_F über K in Linearfaktoren zerfällt, so gibt es Darst

$$p_F(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (t-\lambda_r)^{\mu_r}$$

für die paarweise Verschiedenen EW $\lambda_1, ..., \lambda_r$, $\mu_j = \mu(\lambda_j)$.

Somit hat Minimalpolynom m eine Darstellung

$$m(t) = (t-\lambda_1)^{a_1} \cdots (t-\lambda_r)^{a_r}$$

mit $0 \leq a_i \leq \mu_i$ für alle i.

Setze k_i = Größe des größten Jordan Blocks zum EW λ_i.

Dann gilt für alle Jordan Blöcke J zum EW λ_i, dass

$$(t-\lambda_i)^{k_i}(J) = 0.$$

Somit gilt auch

$$(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2} \cdots (t-\lambda_r)^{k_r}(F) = 0$$

Mit etwas Glück ist das auch schon das Minimalpolynom von F.
Das Minimalpolynom m ist ein Teiler dieses Polynoms, also

$$m = (t-\lambda_1)^{l_1}(t-\lambda_2)^{l_2} \cdots (t-\lambda_r)^{l_r} \quad \text{mit } 0 \leq l_i \leq k_i$$

Annahme: es gelte $l_1 < k_1$.

Bezüglich geeigneter Basis hat F die Matrixdarst

$$A = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{andere Jordanblöcke}$$

$$m(A) = \begin{pmatrix} (J_{k_1}(\lambda_1) - \lambda_1 I)^{l_1} \underbrace{\cdots (J_{k_1}(\lambda_1) - \lambda_r I)^{l_r}}_{\text{regulär}} & \\ & \text{Diverses} \end{pmatrix}$$

$$(J_{k_1}(\lambda_1) - \lambda_1 I)^{l_1} \neq 0, \quad \text{weil } l_1 < k_1$$

$$m(A) = \begin{pmatrix} \neq 0 & \\ & \text{egal} \end{pmatrix} \quad \text{Widerspruch,}$$

$$\Rightarrow \quad m(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_r)^{k_r}.$$

Wann gilt $m(t) = (-1)^n p_F(t)$?

$\Leftrightarrow$ $k_j = \mu_j$ für alle j

Größe des gr. Jordanblocks zu λ_j

algebr. Vf von λ_j = Summe der Größen der Jordanblöcke zum EW λ_j.

$\Leftrightarrow$ nur ein Jordanblock zum EW λ_j. für alle j.

$\Leftrightarrow$ $\rho(\lambda_j) = 1$. für alle j.

<u>Satz 6.4a</u> Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, F: V→V ein Endomorphismus, das char. Poly p_F zerfalle über K in Linearfaktoren, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ seien die paarweise verschiedenen EW von F und k_j die Größe des größten Jordanblocks zum EW λ_j. Dann ist das Minimalpolynom m von F durch

$$m(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \cdots (t-\lambda_r)^{k_r}$$

gegeben.

Weiters gilt $m(t) = (-1)^n p_F(t)$ genau dann, wenn $\varrho(\lambda_j) = 1$ für $j = 1, \ldots, r$. Genau in diesem Fall sind $id, F, F^2, \ldots, F^{n-1}$ l.u.

Beweis. Bis auf letzte Aussage ist alles bereits bewiesen

$$id, F, F^2, \ldots, F^{n-1} \text{ l.u. } \Leftrightarrow \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j F^j = 0 \Leftrightarrow a_0, \ldots, a_{n-1} = 0 \right)$$

$\Leftrightarrow$ das einzige Polynom $p \in K[X]$ mit Grad $\leq n-1$, sodass $p(F) = 0$, ist das Nullpolynom

$\Leftrightarrow \deg m \geq n \Leftrightarrow \deg m = n \Leftrightarrow m(t) = (-1)^n p_F(t)$.

$\square$

6.7.3. Asymptotisches Verhalten diskreter dynamischer Systeme

Geg.: $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$, $x_0 \in \mathbb{C}^d$.

Ges.: Asymptotisches Verhalten von $x_n = A^n x_0$ $\quad (\Leftrightarrow x_n = A x_{n-1})$

Fragen: Wann existiert $\lim_{n \to \infty} x_n$; wann gilt $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, usw.

Betrachte Jordanzerlegung $T^{-1} A T = J$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

also $\quad A = T \cdot J \cdot T^{-1}$ und $\quad x_n = T\, J^n\, T^{-1} x_0 =$

$$= \underbrace{T}_{\text{konstante Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1)^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_r}(\lambda_r)^n \end{pmatrix}}_{\text{hängt von } n \text{ ab}} \underbrace{T^{-1} x_0}_{\text{konstanter Vektor}}$$

Wie verhält sich $\left(J_k(\lambda)\right)^n$ für $n \to \infty$.

$$J_k(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} & \dots \\ & \ddots & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

- Wenn $|\lambda| < 1$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \left(J_k(\lambda)\right)^n = 0$, weil $\lim_{n\to\infty} n^a \lambda^n = 0$

für konstante a.

- Wenn $|\lambda|>1$, so sind alle Einträge über Diagonale von $(J_k(\lambda))^n$ unbeschränkt
- Wenn $|\lambda|=1$ und $k=1$, so gilt $J_1(\lambda)^n = (\lambda^n)$, also beschränkt (und für $\lambda=1$ konvergent, da konstant)
- Wenn $|\lambda|=1$ und $k>1$, dann ist zwar Hauptdiagonale beschränkt, aber obere Nebendiagonalen unbeschränkt.

<u>Beispiel</u>.

$$J = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Wenn } T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

so $$A^n x_0 = T \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also } \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = T \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sonst $\left(T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; c \neq 0 \right)$ gilt

$$A^n x_0 = T \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n a \\ b + cn \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow T \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\infty \\ c \end{pmatrix}.$$

Was heißt $T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ eigentlich?

$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

v_1 EV zum EW $\frac{1}{2}$

v_2, v_3 Kette zum EW 1

v_2 EV zum EW 1

$$T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_0 = T \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_0 = a v_1 + b v_2 \Leftrightarrow$$

$$x_0 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$$

$\boxed{\text{Bsp}}$

<u>Definition</u> Sei $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Dann definiere

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } A\}$$

„Spektralradius von A"

Satz 6.5. Sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$, $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm. Dann gilt

1) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $\varrho(A) < 1$

b) $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$

c) Für alle $x_0 \in \mathbb{C}^d$ gilt $\lim_{n\to\infty} A^n x_0 = 0$.

2) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $\varrho(A) \leq 1$ und alle EW von A des Absolutbetrags 1 haben gleiche algebr. und geom. Vf

b) $\|A^n\|$ ist beschränkt

c) Für alle $x_0 \in \mathbb{C}^d$ ist $A^n x_0$ beschränkt

3) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $\varrho(A) > 1$ oder es gibt EW von A mit $|\lambda| = 1$ und $\varrho(\lambda) < \mu(\lambda)$

b) $\|A^n\|$ ist unbeschränkt

c) Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{C}^d$, sodass $A^n x_0$ unbeschränkt ist.

Beweis Alles steht für $\| \ \|_\infty$ oben, für beliebige Norm folgt die Aussage dann aus Normäquivalenzsatz. $\square$

6.7.4. Lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten

z.B. Fibonacci-Folge $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $F_0 = 0$ $F_1 = 1$

Verallgemeinerung von LinAlg I Ü 40 (+ Klausurbeispiel)

Definition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus K. Dann heißt (x_n) eine durch eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten gegebene Folge, wenn

$$x_{n+d} = a_1 x_{n+d-1} + \dots + a_d x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

für Konstante $a_1, \dots, a_d \in K$ gilt.

Wir wissen aus LinAlg 1, dass für feste $a_1, \dots, a_d$ die Menge

$$U = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid x_{n+d} = a_1 x_{n+d-1} + \dots + a_d x_1 \}$$

ein Untervektorraum des Raums der Folgen ist, und zwar

$$U = \operatorname{Ker}\left(\sigma^d - a_1 \sigma^{d-1} - \dots - a_d \, \mathrm{id} \right),$$ wobei

σ der Rechts-Shift ist, $\sigma((x_n)) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Gesucht: Basis des Untervektorraums.

Betrachte folgende Vektorfolge $z_n = \begin{pmatrix} x_{n+d-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \in K^d$.

Es gilt

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+d} \\ x_{n+d-1} \\ \vdots \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_{n+d-1} + a_2 x_{n+d-2} + \dots + a_{d-1} x_{n+1} + a_d x_n \\ x_{n+d-1} \\ \vdots \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} z_n$$

$$\Longrightarrow \quad z_{n+1} = A z_n \quad \Rightarrow \quad z_n = A^n \cdot z_0$$

Wir brauchen also die Jordanzerlegung von A

Suche EW/EV von A durch direkten Ansatz. $\lambda \ldots$ EW, $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_d \end{pmatrix}$ zugeh. EV.

$$\begin{pmatrix} \lambda \ell_1 \\ \vdots \\ \lambda \ell_d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2 + \cdots + a_d \ell_d \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_{d-1} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_{d-1} &= \lambda x_d \\ x_{d-2} &= \lambda x_{d-1} = \lambda^2 x_d \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{d-j} = \lambda^j x_d \quad \text{für} \quad 0 \leq j \leq d-1.$$

1\. Glg: $\lambda \lambda^{d-1} x_d = \lambda x_1 = \sum_{j=1}^{d} a_j x_j = \sum_{j=1}^{d} a_j \lambda^{d-j} x_d$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^d x_d = \left(\sum_{j=1}^{d} a_j \lambda^{d-j} \right) x_d$$

$x_d = 0$ nicht interessant, weil dann $x = 0$, also kein EV. Also dividiere durch x_d:

$$\lambda^d = \sum_{j=1}^{d} a_j \lambda^{d-j}$$

Polynomglg d-ten Grades für λ „char. Glg"

(entspricht „char. Poly von A)

EV: $\begin{pmatrix} \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ alle EW haben geom. Vf 1.

VO 20.5. siehe eigenes File.

27. 5. 2010

$x'(t) = Ax$ Diffglgssysteme gelöst.

lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung.

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$

$x = x(t)$.

$a_0, \dots, a_n$ ... konstant.

$x^{(n)} = y_{n+1}$, $x^{(n-1)} = y_n$, $x'' = y_3$, $x' = y_2$, $x = y_1$

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$\vdots$$

$$y_n' = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n - \frac{a_{n-2}}{a_n} y_{n-1} - \dots - \frac{a_0}{a_n} y_1$$

$$y' = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} y$$

Dgl-System

Die Matrix ist sehr verwandt zu den Matrizen bei lin. Rekursionen (die entspr. Theorien entsprechen einander).