Kapitel 7. Eigenwerte über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Kap 6 war für beliebige Körper (außer manche Anwendungen der Jordanform)
hier jetzt Kombination mit Orthogonalität, unitären Matrizen & Co.

Also: $\mathbb{K}^n$ mit Standard-IP.

7.1. Schursche Normalform

Satz 7.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, p_A zerfalle über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren.
Dann gibt es eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sodass
$$U^* A U$$
eine obere Dreiecksmatrix ist.

Bemerkungen 1. Vergleich

	Diagonalisierbar	Jordan	Schur
	manche Matrizen	alle Matrizen	alle Matrizen
	reguläre Transf.-mat.	reguläre Transf.-M.	unitäre Transf.
	Diagonalmatrix	sehr schöne ∇-Matrix	irgendeine ∇

2. $U^* = U^{-1}$, d.h. U^*AU ist ähnlich zu A, somit

gleiche EW und transformierte EV.

3. EW von U^*AU (und damit von A) stehen auf Diagonale von U^*AU.

4. Schreibe $U^*AU = R$ $\quad U = (u_1, \dots, u_n)$

$(u_1, \dots, u_n)$ ist ONB des $\mathbb{K}^n$. Es gilt

$$AU = UR$$

$$A(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n)\, R = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots \\ & r_{22} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$Au_1 = r_{11} u_1 \qquad \text{EV/EW}$$

$$\left.\begin{array}{l} Au_2 = r_{12} u_1 + r_{22} u_2 \\ \text{usw.} \end{array}\right\} \text{hier i.A. keine EV mehr.}$$

<u>Beweis des Satzes.</u> Induktion nach n.

$n = 1$. $\quad U = I$ tut das Gewünschte.

$(n-1) \to n$. Sei u ein EV zum EW λ von A mit $\|u\|_2 = 1$.

Ergänze u zu einer Orthonormalbasis

$$u \quad w_2 \; \cdots \; w_n$$

von $\mathbb{K}^n$.

Stelle F_A bzgl. dieser Basis dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u^* \\ w_2^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{pmatrix}}_{=U_1^*} \qquad A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}}_{=: U_1} = \begin{array}{c} Au = \lambda u \\ \begin{pmatrix} \lambda & \\ 0 & \\ \vdots & ? \\ 0 & \end{pmatrix} \end{array}$$

Da $(u, w_2, \ldots, w_n)$ eine ONB ist, ist U_1 unitär, wir haben also

$$U_1^* A U_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & ? \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

Laut Induktionsannahme gibt es eine unitäre Matrix $U_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, sodass $U_2^* B U_2 = R_2$ für passende obere Dreiecksmatrix $R_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$

Somit

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&U_2^*\end{pmatrix} U_1^* A U_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&U_2\end{pmatrix}}_{\text{unitär}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&U_2^*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda&?\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&U_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&U_2^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&?\\0&BU_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda&?\\0&U_2^*BU_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda&?\\0&R_2\end{pmatrix}}_{=:R}$$

R obere Dreiecksmatrix.

$$U = U_1\begin{pmatrix}1&0\\0&U_2\end{pmatrix} \quad \text{unitär} \qquad \square$$

7.2. Unitäre Diagonalisierbarkeit

manche manche Matrizen

unitäre Transformationsmatrix

Diagonalmatrix

Sei zur Einstimmung $A^* = A$ Schur: $U^*AU = R$

Dann gilt $R^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U^{**} = U^*AU = R$.

$\Longrightarrow$ $R^* = R$, also ist R Diagonalmatrix und alle Diagonalelemente von R ($=$ Eigenwerte von A) sind reell.

<u>Korollar.</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$. Dann gibt es ~~ers~~ eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sodass

$$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW von A mit algebr. Vielfachheiten sind. Weiters gilt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis.</u> <u>Fast</u> alles steht in Satz 7.1 (Schur) + obigen Überlegungen.

Voraussetzung über Zerfallen von p_A in Linearf. fehlt.

Reparatur: Zuerst Schur + Co in $\mathbb{C}$ anwenden, damit sind EW reell, somit zerfällt p_A über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, dann gleiche Rechnung nochmals über $\mathbb{R}$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). $\square$

<u>Definition</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann heißt A <u>unitär diagonalisierbar</u>, wenn es ein $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitär gibt, sodass U^*AU eine Diagonalmatrix ist.

Bemerkung A unitär diagb. $\Longleftrightarrow$ es gibt eine ONB von K^n, die aus EV von A besteht.

Frage: Welche Matrizen sind unitär diagb.
(Lt obigem Korollar: selbstadjungierte Matrizen sind unitär diagonalisierbar).

Definition. Sei $A \in K^{n\times n}$, dann heißt A normal, wenn $A^*A = AA^*$

Satz 7.2. (Charakterisierung unitär diagb. Matrizen). Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt

A ist unitär diagonalisierbar (p_A zerfalle über K in Linearfaktoren) $\Longleftrightarrow$ A ist normal.

Beweis „$\Rightarrow$“ Sei A unitär diagb. $\Rightarrow$ $\exists U$ unitär, D diagonal mit

$$U^* A U = D$$

$$\Rightarrow \quad A = U D U^* \qquad A^* = (UDU^*)^* = U D^* U^* = U\bar{D}U^*$$

$$AA^* = (UD\underbrace{U^*)(U}_{I}\bar{D}U^*) = UD\bar{D}U^* = U\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\cdot\operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n)U^*$$

$$= U \operatorname{diag}(\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_n\bar{\lambda}_n) U^* =$$

Komm. Ges in $\mathbb{C}$.

$$\overset{\Downarrow}{=} U \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1\lambda_1, \bar{\lambda}_2\lambda_2, \dots, \bar{\lambda}_n\lambda_n) U^* =$$

$$= U \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^* =$$

$$= U \bar{D} D U^* = U\bar{D} U^* U D U^* = A^* A.$$

"$\Leftarrow$" Sei $U^* A U = R$ ~~die~~ eine Schur-Zerlegung von A.

Hoffnung: R ist diagonal.

Behauptung 1. R ist normal.

Bew der Beh

$$R^* = (U^* A U)^* = U^* A^* U$$

$$RR^* = U^* A \underbrace{U U^*}_{I} A^* U = U^* A A^* U \overset{A \text{ normal}}{=} U^* A^* A U =$$

$$= U^* A^* \underbrace{U U^*}_{I} A U = R^* R.$$ $\boxed{\text{Beh}}$

Behauptung 2. Normale obere Dreiecksmatrizen sind Diagonalmat.

Bew der Beh Induktion nach n. $n = 1$ klar.

$n-1 \to n$

$$R = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} a & b^* \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \begin{array}{l} \}1 \\ \}n-1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{1} & \underbrace{}_{n-1} \end{array} \end{array}$$

S ... obere Dreiecksmatrix,

$$R^* = \left(\begin{array}{c|c} \bar{a} & 0 \\ \hline b & S^* \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \bar{a}a & \text{egal} \\ \hline \text{egal} & bb^* + S^*S \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \bar{a} & 0 \\ \hline b & S^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & b^* \\ \hline 0 & S \end{array}\right) = R^*R = RR^* = \left(\begin{array}{c|c} a & b^* \\ \hline 0 & S \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \bar{a} & 0 \\ \hline b & S^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a\bar{a} + b^*b & \text{egal} \\ \hline \text{egal} & SS^* \end{array}\right)$$

$$\bar{a}a = a\bar{a} + b^*b \implies b^*b = 0 \implies \langle b,b\rangle = 0 \implies b = 0.$$

$+$: $\quad S^*S = SS^*$ $\quad S$ obere normale Dreiecksmatrix

$$\underset{\text{I.A.}}{\implies} S \text{ diagonal}$$

$$\implies R = \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonal}}}{S} \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Bd.}}$ $\square$

Bemerkungen 1) Wenn $A^* = A$, so ist A trivialerweise normal, also

A unitär diagonalisierbar, aber das wissen wir schon.

2) Sei U unitär, dann gilt $U^*U = I = UU^*$, also sind auch unitäre Matrizen normal.

3) „normale normale Matrizen" sind also gar nicht so wenige.

4) Bsp 1 in Kap. 6 war unitär diagb. reell $\Rightarrow$ Orthogonalmatrix, reelle EW.

5) Sei A unitär diagb., $\Rightarrow$ Eigenräume zu versch. EW stehen aufeinander normal.
Beim Berechnen einer ONB von EV muss man sich um Orthogonalität innerhalb eines Eigenraums jedoch selbst kümmern.

<u>Bsp.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = A, \text{ also unitär diagb.}$$

$$p_A(t) = \dots = -(t+9)^2(t-27).$$

EV zum EW $+27$: $\dots$ $\operatorname{span}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ normierter EV.

EV zum EW -9:

$$\begin{pmatrix}16 & -16 & -8\\ -16 & 16 & 8\\ -8 & 8 & 4\end{pmatrix} \Big| :8 \mapsto \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Da A unitär diagb, ist A diagb, also $g(-9) = \mu(-9) = 2$ klar.

$x_1 = s$
$x_2 = t$ $\qquad 2s - 2t - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2s - 2t$

Eigenraum: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

beide Vektoren müssen wegen unit Diagb. normal auf $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ stehen, allerdings

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = -4 \neq 0$$

Verwende Gram-Schmidt: $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{(-4)}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \end{pmatrix}. \qquad U^*U = I$$

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 27 & & \\ & -9 & \\ & & -9 \end{pmatrix}$$

<u>Proposition</u>. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär diagb., $U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ unitär. Dann gilt

„Spektralzerlegung normaler Matrizen"
$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j u_j^*.$$

<u>Beweis</u> (vgl Ü 75)

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* + \cdots + \lambda_n u_n u_n^*$$

$\square$