Satz 8.4. (Charakterisierungen p.d. Matrizen) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) A ist positiv definit
2) Alle Eigenwerte von A sind positiv.
3) Alle Hauptminoren sind positiv ($\det A^{(k)} > 0$ für $1 \le k \le n$, wobei $A^{(k)}$ die linke obere $k \times k$-Teilmatrix von A ist)
4) Es gibt eine untere Dreiecksmatrix C mit positiven Diagonalelementen, sodass

$$A = CC^*$$

„Cholesky-Zerlegung"

__Bemerkung__ Die Äquivalenz 1) $\Leftrightarrow$ 3) wurde im Fall reeller Matrizen bereits in Satz 3.6 bewiesen; wir beweisen diese Äquivalenz hier nochmals (unabhängig von damaligen Resultaten).

1) $\Rightarrow$ 2) Sei λ ein EW von A, x zugeh. EV. Dann gilt

$$\lambda = \lambda \frac{x^*x}{x^*x} = \frac{x^*\lambda x}{x^*x} = \underbrace{\frac{x^*Ax}{x^*x}}_{\rho_A(x)} \underset{\text{A p.d.}}{>} 0 \qquad (x \neq 0, \text{ da EV}).$$

2) $\Rightarrow$ 1) Da alle EW positiv sind, ist das Minimum des Rayleigh-Quot (= kleinster EW) auch positiv, also

$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$: $\quad 0 < \rho_A(x) = \dfrac{x^* A x}{\underbrace{x^* x}_{>0}} \quad \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$: $\quad x^* A x > 0$, also A positiv definit.

(oder: Da $A^* = A$, ist A unitär diagonalisierbar, also gibt es unitäres U

1) $\Leftrightarrow$ 2) mit $U^* A U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW von A sind

D.h. IP $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ wird bezüglich Basis U durch $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

dargestellt.

A pd $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ $\Leftrightarrow$ alle EW positiv).

1+2) $\Rightarrow$ 3) Sei A p.d. Dann ist auch $A^{(k)}$ p.d.

(Weil: $\tilde{x}^* A^{(k)} \tilde{x} = (\tilde{x}^* \; 0) \begin{pmatrix} A^{(k)} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} = (\tilde{x}^* \; 0) A \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} > 0$

für $\tilde{x} \neq 0$, weil A p.d. ist.

oder alle EW von A sind positiv

(Schachtelungssatz sagt, dass alle EW von $A^{(n-1)}$ positiv sind.
$(n-k)$ fach Schachtelungssatz sagt, dass alle EW von $A^{(k)}$ positiv sind.
also $A^{(k)}$ p.d.)

$\Longrightarrow$ alle EW von $A^{(k)}$ sind positiv $\Longrightarrow$ $\det A^{(k)}$ = Produkt der EW von $A^{(k)} > 0$

(3) $\Longrightarrow$ (2) via Schachtelungssatz ist Privatvergnügen

(3) $\Longrightarrow$ (4) Wir wollen also LR-Zerlegungs-Variante beweisen, wo $L^* = R$.

laut Lin Alg 1, Satz 3.2 besitzt A eine LR-Zerlegung,

also $A = L \cdot R$

L ... untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf Diagonalen

R ... obere —"— , regulär.

Wie im Beweis von Satz 3.2 (LA 1) gilt

$$\begin{pmatrix} A^{(k)} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = A = L \cdot R = \begin{pmatrix} L^{(k)} & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{(k)} & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{(k)} R^{(k)} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix},$$

also $A^{(k)} = L^{(k)} R^{(k)}$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \det A^{(k)} = \underbrace{\det L^{(k)}}_{1 \cdot 1 \cdots 1} \det R^{(k)} = r_{11} r_{22} \cdots r_{kk},$$

wobei die $r_{11}, \dots, r_{nn}$ die Hauptdiagonalelemente von R sind

Da R regulär ist, sind die r_{jj} $\underbrace{\text{alle}}_{>0}$ ungleich 0.

$$\Rightarrow \quad r_{kk} = \frac{r_{11}\, r_{22} \cdots r_{kk}}{r_{11}\, r_{22} \cdots r_{k-1,k-1}} = \frac{\det A^{(k)}}{\underbrace{\det A^{(k-1)}}_{>0}} > 0,$$

also sind Hauptdiagonalelemente von R positiv.

$$\Rightarrow \quad R = \operatorname{diag}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}) \cdot \tilde{R},$$

wobei $\tilde{R}$ obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf Hauptdiagonale.

Setze $D = \operatorname{diag}(\sqrt{r_{11}}, \sqrt{r_{22}}, \dots, \sqrt{r_{nn}})$ (reell möglich, weil $r_{jj} > 0$ sind)

$$\Rightarrow \quad A = L \cdot \underbrace{D \cdot D \cdot \tilde{R}}_{R}$$

$$(\tilde{R}^* D)^{-1} \,\Big|\quad \underbrace{(LD)}_{\text{untere}}\underbrace{(D\tilde{R})}_{\text{oberes}} = A = A^* = \underbrace{(\tilde{R}^* D)}_{\text{unteres}}\underbrace{(D L^*)}_{\text{oberes}} \quad \Big| \cdot (D\tilde{R})^{-1}$$

Dreieck Dreieck Dreieck Dreieck

$$\underbrace{\underbrace{(\tilde{R}^* D)^{-1}}_{\text{untere Dreiecksm}} (LD)}_{\text{untere Dreiecksmatrix}} = \underbrace{(DL^*)\underbrace{(D\tilde{R})^{-1}}_{\text{obere Dreiecksmatrix lt ÜLA1.91}}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}} \quad \text{lt ÜLA1.36}$$

$$\Longrightarrow \quad (\tilde{R}^* D)^{-1} (LD) \quad \text{ist Diagonalmatrix}$$

$$\| $$

$$\underbrace{D^{-1} \underbrace{(\tilde{R}^*)^{-1} L}_{\text{Diagon.el}=1} D}_{\text{Diagonalel}=1}$$

(lt ÜLA1.91c + Lösung von ÜLA1.36)

$$\begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & \text{l.V.} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{r_{ii}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{ii}}} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad (\tilde{R}^* D)^{-1} \cdot (LD) = I$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{LD}_{C} = \tilde{R}^* D \qquad \Longrightarrow \quad \tilde{R}^* D = C$$

$$\Longrightarrow \quad C^* = D\tilde{R}$$

$\Rightarrow \quad A = CC^*$ ✓

$4) \Rightarrow 1)$ $\quad A = CC^* = C \cdot \underbrace{I}_{\text{p.d.}} \cdot C^*$ $\quad$ Laut obiger Proposition (= Lemma 1 aus 3.6)

folgt A p.d., weil C regulär ist (positive Diagonale). $\square$

Bemerkungen: 1) $\quad A = CC^*$ (Cholesky)

$\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle_A = x^* A x = x^* C C^* x = (C^* x)^* (C^* x) = \|C^* x\|_2^2$

also: die Normen, die durch p.d. innere Produkte auf $\mathbb{K}^n$ induziert werden sind genau die Normen lt. Ü21 für obere Dreiecksmatrizen.

2) manche schreiben auch $A = C^* C$, C obere Dreiecksmatrix.

3) Cholesky-Zerlegungen, wenn man sie einmal hat, können wie LR-Zerlegung zum Lösen von GLS herangezogen werden: (vgl LR Zerlegung).

Satz 8.5. Sei $A = A^*$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt

1) A p.s.d. $\Longleftrightarrow$ alle EW von A sind ≥ 0.
2) A neg. def $\Longleftrightarrow$ alle EW von A sind < 0
3) A neg. semidef $\Longleftrightarrow$ alle EW von A sind ≤ 0.
4) A indefinit $\Longleftrightarrow$ es gibt mind einen pos EW von A und mind. einen neg. EW von A.

Beweis durch Nachprüfen des Beweises von Satz 8.4., $(1) \Leftrightarrow (2)$ für diese Fälle $\square$

Bem. Hauptminorenkrit für neg. def. Matrizen vgl Korollar zu Satz 36, für semidefinite Matrizen ist Nachdenken über Schachtelungssatz, det = Produkt der EW vonnöten.

8.3. Cholesky-Zerlegung direkt berechnen

Beweis der Existenz der Cholesky-Zerlegung war konstruktiv, aber man kann die Cholesky-Zerlegung auch direkt bekommen

Sei $A^* = A$ p.d.

Ansatz: $A = CC^*$

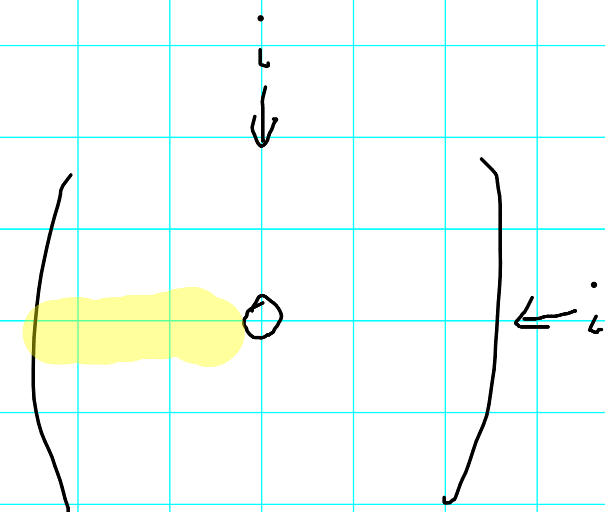
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\overline{c_{jk}} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} c_{ik}\overline{c_{jk}}.$$

Für $j \le i$ gilt also:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} c_{ik}\overline{c_{jk}}.$$

Betrachte zunächst den Fall $i=j$:

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} |c_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{i-1} |c_{ik}|^2 + |\underbrace{c_{ii}}_{>0}|^2$$



$$\Longrightarrow \quad c_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |c_{ik}|^2}$$

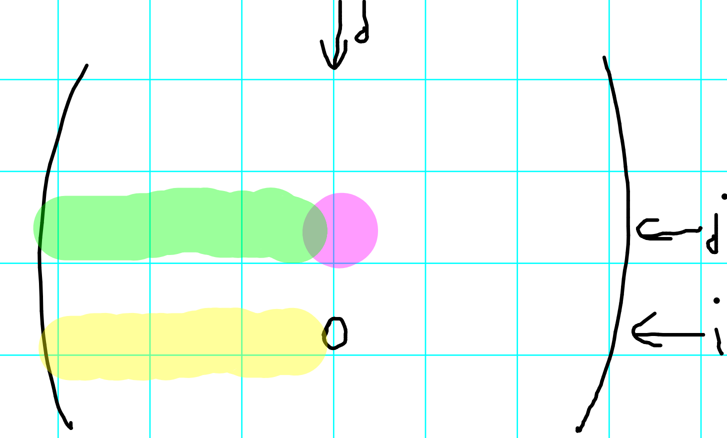
kann berechnet werden, wenn die ersten $i-1$ Spalten von C bereits bekannt.

Sei $j<i$ $\quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}\overline{c_{jk}} + c_{ij}\overline{c_{jj}}$

$k = 1$

Da $c_{jj} > 0$, kann kompl. Konjug. weggelassen werden und erhalte

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} \overline{c_{jk}} \right)$$



kann berechnet werden, falls ersten $j-1$ Spalten sowie Diagonalelement jj (s.o.) von C bereits bekannt.

Wir müssen also spaltenweise operieren

geg A mit $A^* = A$

ges C Cholesky-Faktor

for $j = 1$ to n

$$c_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{kj}|^2}$$

for $i = j+1$ to n

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} \overline{c_{jk}} \right)$$

<u>Bemerkung.</u> dieser Algorithmus beweist Eindeutigkeit der Cholesky-Zerleg.

§ 4. Hadamardsche Ungleichung

<u>Satz 8.6.</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $A^* = A$ p.d. Dann gilt

$$0 < \det A \leq a_{11} \cdots a_{nn}$$

Gleichheit gilt rechts genau dann, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

<u>Beweis.</u> $0 < \det A$ gilt lt Hauptminoren Krit

Sei $A = CC^*$ die Cholesky-Zerlegung von A

$$\det A = \det (CC^*) = \det C \det C^* = (\det C)^2 = (c_{11} c_{22} \cdots c_{nn})^2$$
$$= c_{11}^2 \, c_{22}^2 \cdots c_{nn}^2$$

$$= \left(a_{11} - \sum |\ |^2\right)\left(a_{22} - \sum |\ |^2\right)\left(a_{33} - \sum |\ |^2\right) \cdots \left(a_{nn} - \sum |\ |^2\right)$$

$$\leq a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

Gleichheit falls $\sum |\ |^2 = 0$ überall, wenn also C Diagonalmatrix, also $A = CC^*$ ebenfalls Diagonalmatrix. $\square$

<u>Korollar (Hadamardsche Ungleichung)</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebig mit Spalten

$$A = (a_1\ a_2 \cdots a_n).$$ Dann gilt

$$|\det A| \leq \|a_1\|_2 \cdots \|a_n\|_2.$$

<u>Beweis.</u> <u>Fall 1.</u> A singulär. $\Rightarrow$ $\det A = 0$, also nichts zu zeigen

<u>Fall 2</u> A regulär

Sei $B = A^* A$. B ist lt. Prop. aus Abschnitt 8.2 p.d.,

also

$$|\det A|^2 = \det A^* \det A = \det B \le b_{11}\, b_{22} \cdots b_{nn}.$$

$$b_{jj} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \|a_j\|_2^2$$

$\Longrightarrow$ $$|\det A|^2 \le \|a_1\|_2^2 \cdots \|a_n\|_2^2$$ ziehe Wurzel $\square$

10.6.2010

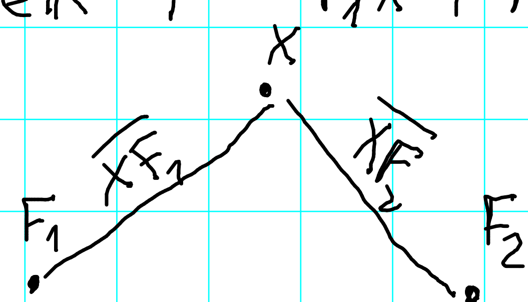
8.5 Kegelschnitte

8.5.1. Kegelschnitte in Hauptform

<u>Definition</u> Eine Ellipse ist die Menge jener Punkte im $\mathbb{R}^2$, sodass die Summe der Abstände zu zwei gegebenen „Brennpunkten" konstant ist, also

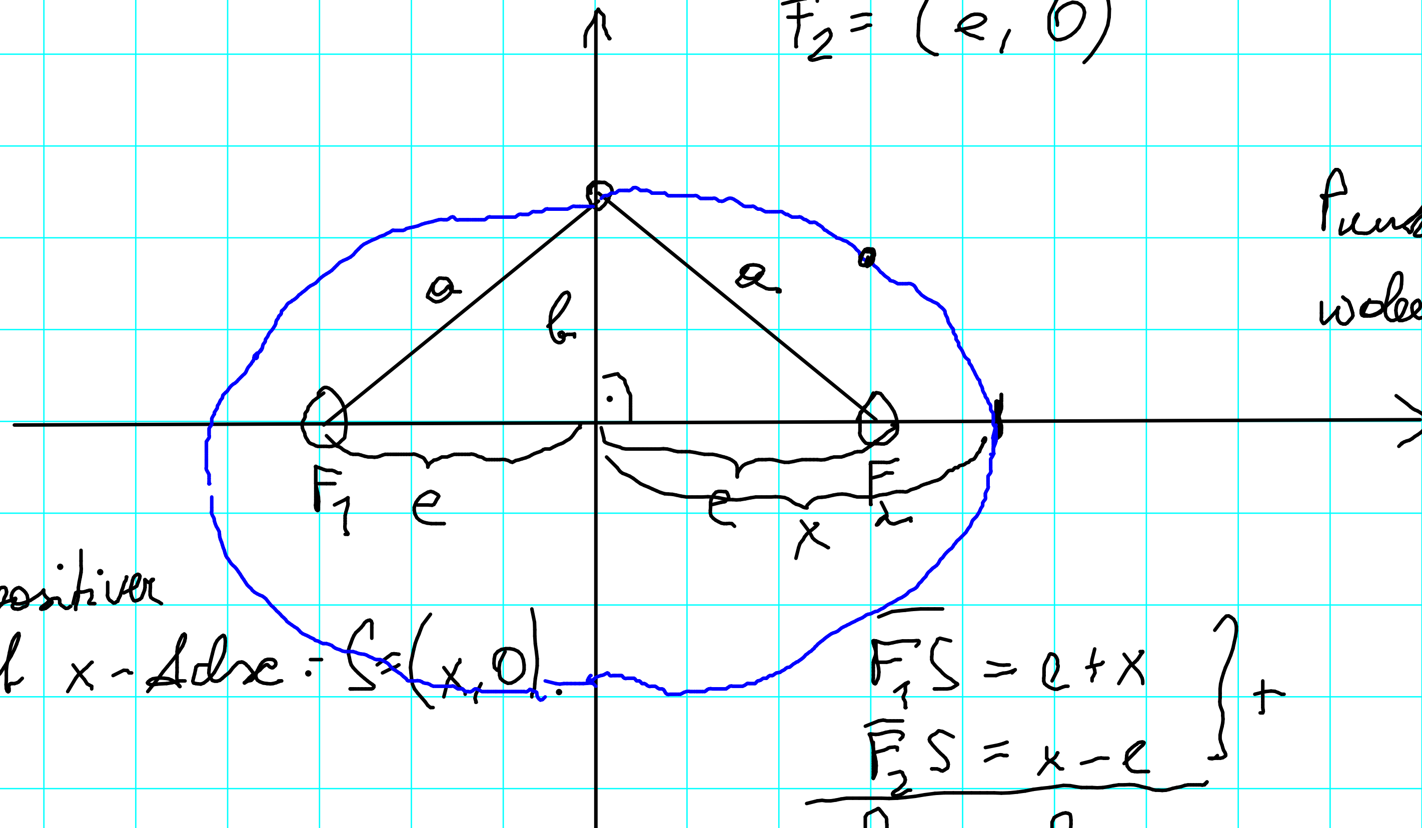
$$E = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{F_1X} + \overline{F_2X} = 2a \}$$

für feste Punkte $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$.



$$\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$$

Ellipse in Hauptlage: Brennpunkte $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ für $e > 0$.



Punkt $(0, b)$ liegt auf E, wobei $b^2 + e^2 = a^2$.

positiver Schnittpunkt mit x-Achse: $S = (x, 0)$.

$$\left.\begin{aligned} \overline{F_1 S} &= e + x \\ \overline{F_2 S} &= x - e \end{aligned}\right\} +$$
$$2a = 2x \quad \Longrightarrow x = a.$$

a, b heißen Halbachsenlängen.

Bestimme Gleichung:

$$(x, y) \in E \iff \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$
$$\iff \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad \Big|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x+e)^2+y^2 = 4a^2 + (x-e)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cancel{x^2}+2xe+\cancel{e^2}+\cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2xe + \cancel{e^2} + \cancel{y^2} - 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cancel{4}xe - \cancel{4}a^2 = -\cancel{4}a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 - xe = a\sqrt{(x-e)^2+y^2} \qquad \Big|^2$$

$$a^4 + x^2e^2 - \cancel{2a^2xe} = a^2\left(x^2 - \cancel{2xe} + e^2 + y^2\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2(a^2-e^2) = x^2(a^2-e^2) + a^2y^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2 \qquad \Big| : a^2b^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Spezialfall $a=b$: Kreis.

also ist Ellipse ein Kreis, der in x-Richtung mit a gestreckt und in y-Richtung mit b gestreckt wurde.

Parametrisierung durch Polarkoordinaten: $\begin{aligned} x &= a\cos\varphi \\ y &= b\sin\varphi \end{aligned}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

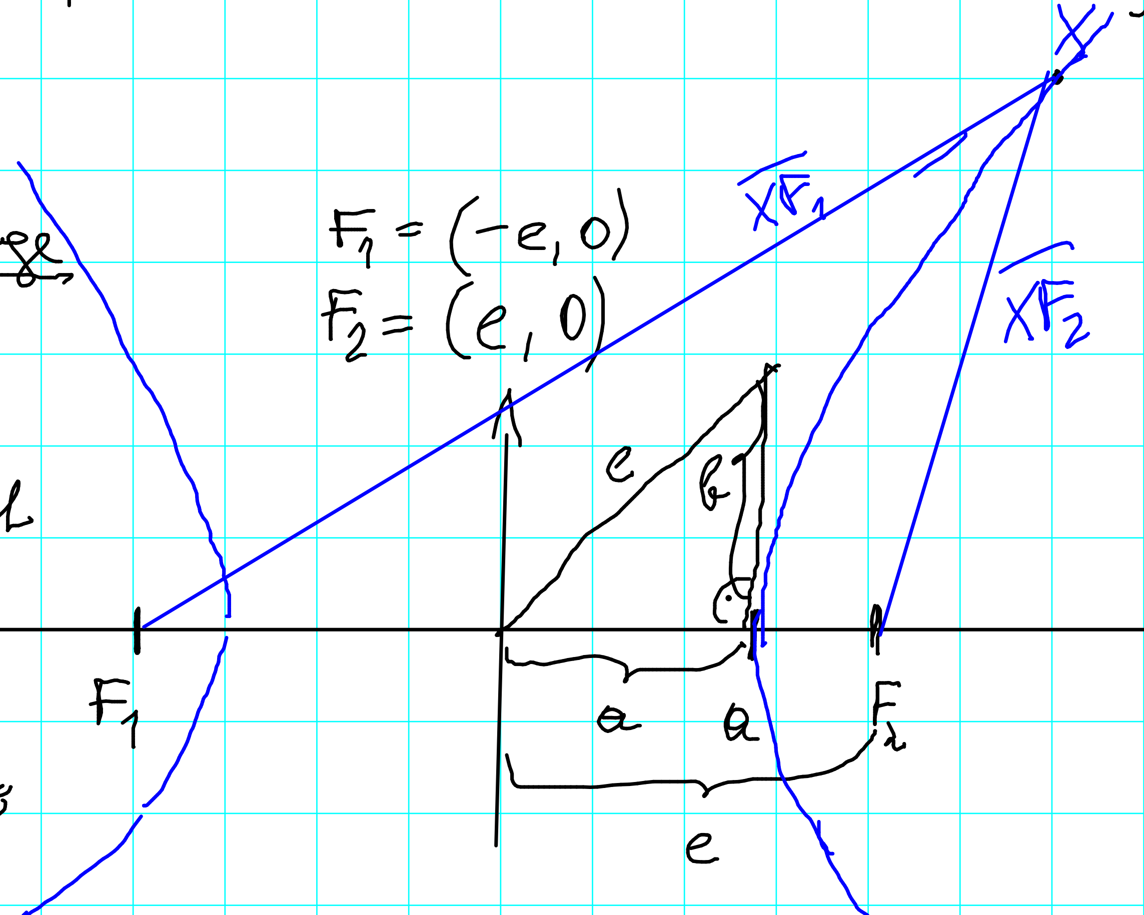
<u>Definition</u> Eine Hyperbel ist die Menge jener Punkte im $\mathbb{R}^2$, sodass dieser Absolutbetrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen „Brennpunkten" konstant ist, also

$$H = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid |\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a \}$$

F_1, F_2 Brennp.
$a > 0$ konst.

<u>Hyperbel in Hauptlage</u>

$F_1 = (-e, 0)$
$F_2 = (e, 0)$



Falls $a \neq e$, kann der Schnittpunkt mit der x-Achse nicht rechts von F_2 sein, weil dort die Differenz der Abstände $= 2e$

Wenn $a = e$, dann zwei Strahlen $\{x \geq e\} \cup \{x \leq e\}$, fad.

$\Rightarrow a < e$

statt 2a wäre.

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-e)^2+y^2} \quad \Big|^2$$

$$(x+e)^2+y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2+y^2$$

gleiche Rechnung wie oben: $\Longrightarrow$

$$a^2(a^2-e^2) = x^2(a^2-e^2) + a^2y^2.$$

Schnittpunkt mit x-Achse: $x = \pm a$

Rechtwinkl. Dreieck mit Hyp. e und Kat. a und b.

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad \Longrightarrow \quad e^2 - a^2 = b^2$$

$$\Longrightarrow \quad -a^2b^2 = -b^2x^2 + a^2y^2 \quad \Big| : -a^2b^2$$

$$\boxed{1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

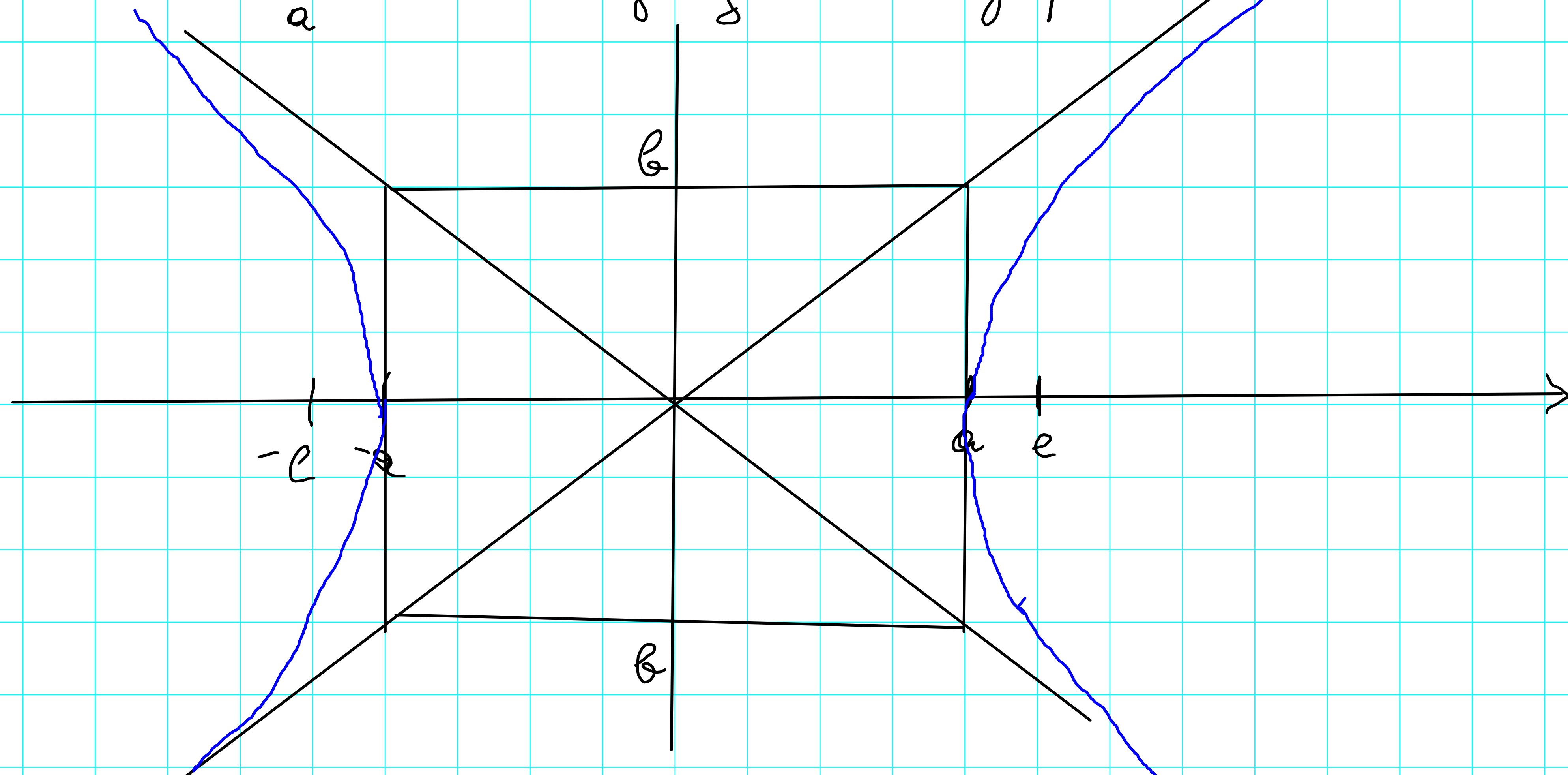
Die geom. Bedeutung von b ist bis jetzt etwas vage.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2y^2}{a^2x^2} = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b^2}{a^2} - \underbrace{\frac{b^2}{x^2}}_{\to 0}\right) = \frac{b^2}{a^2}$$

$\Rightarrow$ $\pm\frac{b}{a}$ ist Steigung der Asymptoten.

Geraden mit Steigung $\frac{b}{a}$



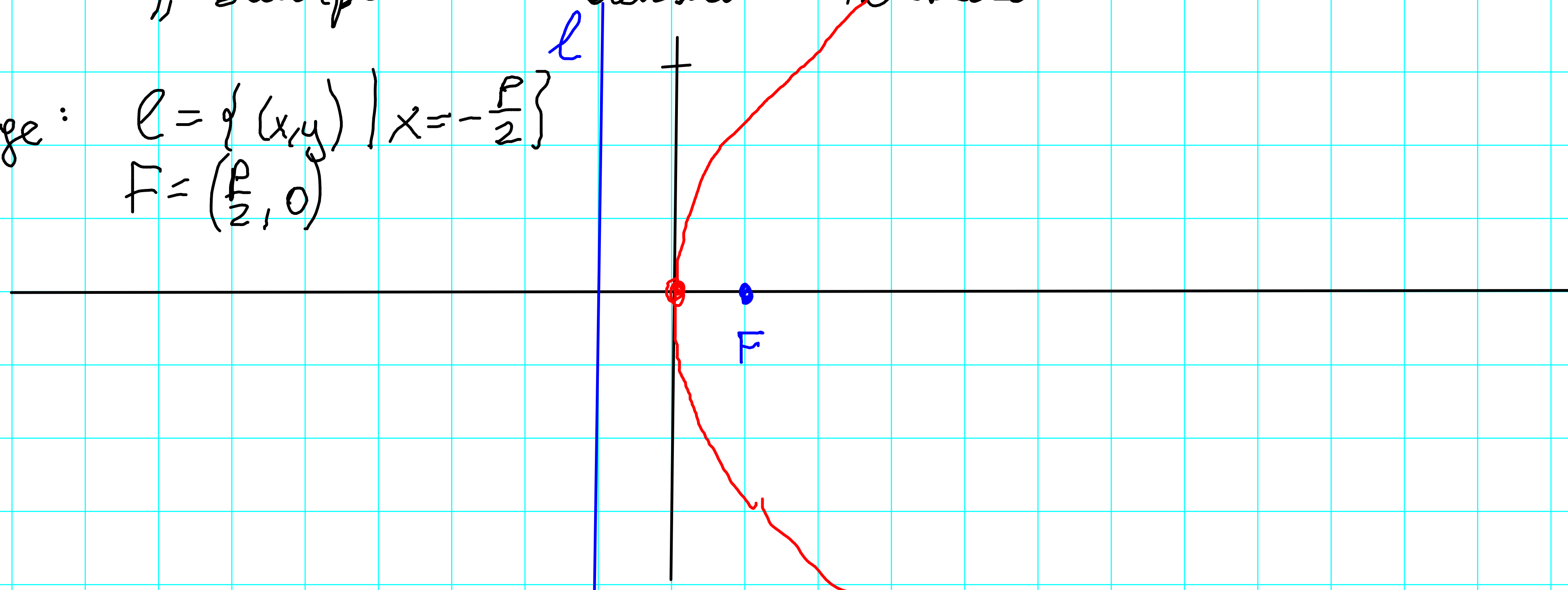
$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}x - \sqrt{\frac{-b^2a^2 + b^2x^2}{a^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{-a^2 + x^2}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{-a^2 + x^2}} = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{a^2}{\underbrace{x + \sqrt{x^2 - a^2}}_{\to\infty}} = 0.$$

Parabel. Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden („Leitlinie") und einem gegebenen Punkt „Brennpunkt" denselben Abstand hat.

Hauptlage: $\ell = \{(x,y) \mid x = -\frac{p}{2}\}$

$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$



$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \overline{X\ell} = \overline{XF} \right\}$$

Normalabstand ℓ zu X.

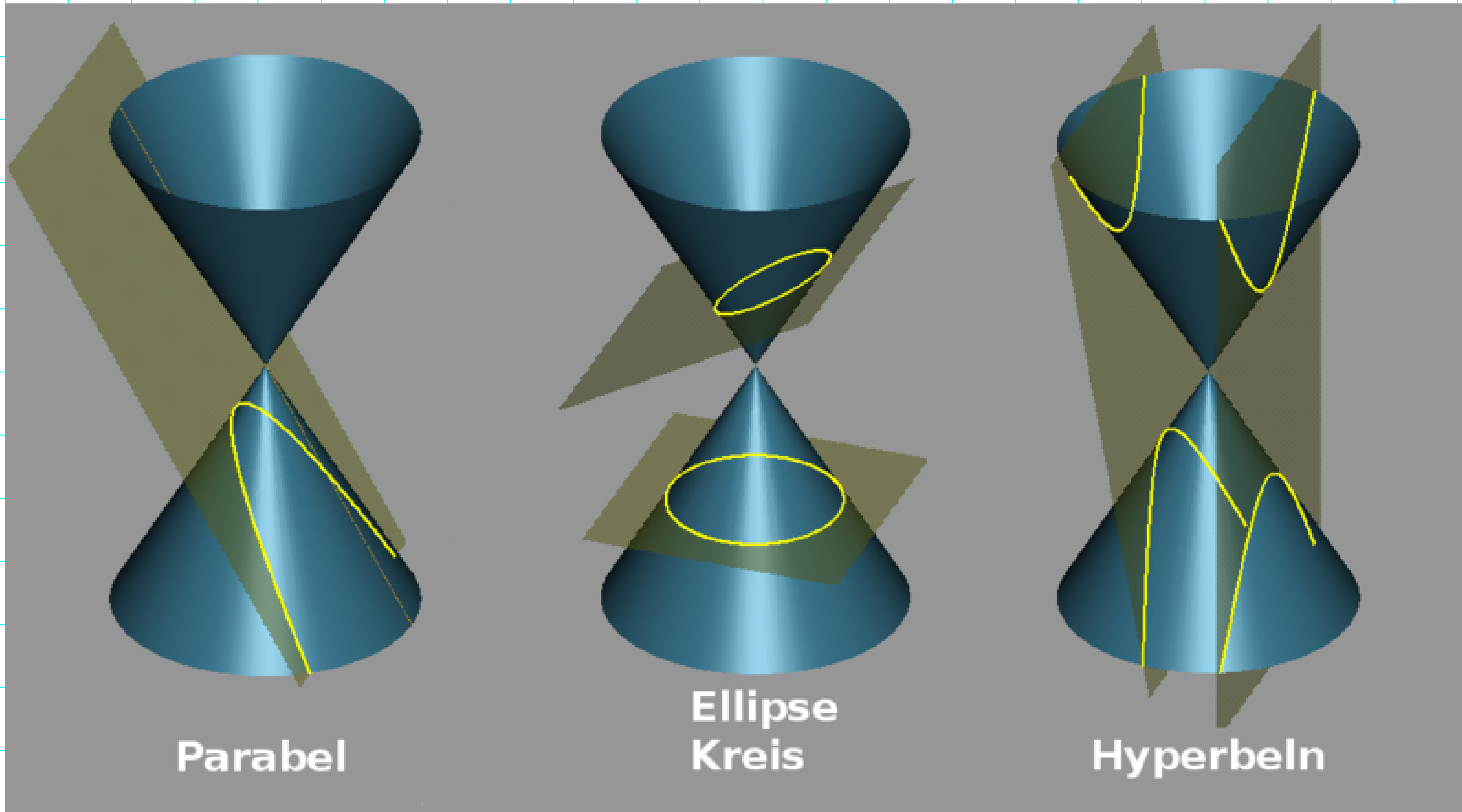
$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad \Big|^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2$$

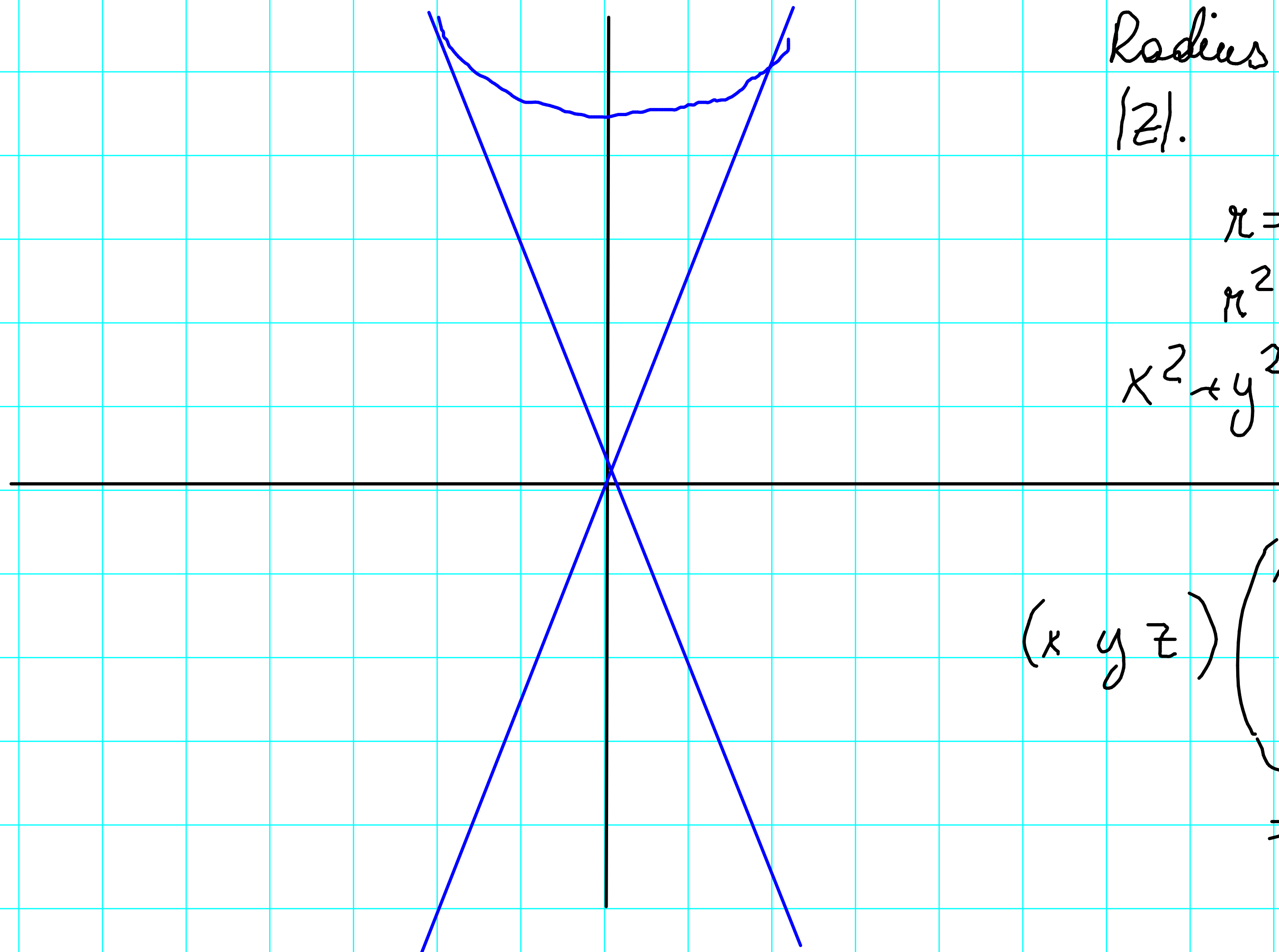
$$\boxed{y^2 = 2px}$$

8.5.2. Kegelschnitte als Schnitte zwischen Kegel und Ebene



Kegel.   Aufriss

Drehachse = z-Achse



Radius ist proportional zu $|z|$.

$$r = k\,|z|$$
$$r^2 = k^2 z^2$$
$$x^2 + y^2 = k^2 z^2 \qquad \text{Drehkegel}$$

$$(x\ y\ z)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -k^2 \end{pmatrix}}_{=:\,M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Schnitt mit einer Ebene in Parameterform

$$E: \quad x = p + \alpha v + \beta w \qquad v, w \text{ Orthonormal}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Setze Ebenengleichung in Drehkegel ein:

$$(p + \alpha v + \beta w)^t\, M\, (p + \alpha v + \beta w) = 0$$

$$\alpha^2 \underbrace{(v^t M v)}_{a_{20}} + \alpha\beta \underbrace{(v^t M w + w^t M v)}_{2a_{11}} + \beta^2 \underbrace{w^t M w}_{a_{02}} + \alpha \underbrace{(v^t M p + p^t M v)}_{2a_{10}} +$$
$$+ \beta \underbrace{(w^t M p + p^t M w)}_{2a_{01}} + \underbrace{p^t M p}_{a_{00}} = 0.$$

vorläufiges Ergebnis. Schnitt Ebene/Doppelkegel ergibt Gleichung

$$a_{20}\alpha^2 + 2a_{11}\alpha\beta + a_{02}\beta^2 + 2a_{10}\alpha + 2a_{01}\beta + a_{00} = 0$$

für gewisse Konstanten $a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00} \in \mathbb{R}$.

8.5.3. Von bivariaten quadr. Glg. zu Hauptformen.

gg. Glg. $\quad a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0. \qquad (1)$

<u>Annahme</u>: $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq (0,0,0)$. (sonst ist das Ebenenglg od.dgl. = fad)

Umschreiben in Matrixform.

$$(1) \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{02} \end{matrix}}}^{=:A} & \overbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{10} \\ a_{01} \end{matrix}}}^{=:C} \\ \begin{matrix} a_{10} & a_{01} \end{matrix} & a_{00} \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ut Annahme $A \neq 0$. Nach Konstruktion: $B^t = B$, $A^t = A$.

Daher besitzt A eine orthogonale Diagonalisierung

$$\tilde{Q}^t A \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{Q} \text{ orthogonal.}$$

Da $A \neq 0$, können nicht beide EW gleich 0 sein, oBdA $\lambda_1 \neq 0$.

Setze

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^t B Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & c \\ c^t & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\tilde{Q} & c \\ c^t\tilde{Q} & a_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t A \tilde{Q} & \tilde{Q}^t c \\ c^t \tilde{Q} & a_{00} \end{pmatrix}$$

Setze $\tilde{Q}^t c = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ und erhalte

$$Q^t B Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & e \\ 0 & \lambda_2 & f \\ e & f & a_{00} \end{pmatrix}$$

Koordinatentransf.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{Q} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$

wichtig: orthogonale Transf. (ändert Geometrie nicht).

$$(1) \iff (u \;\; v \;\; 1)\, Q^t B Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (u \;\; v \;\; 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & e \\ 0 & \lambda_2 & f \\ e & f & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + 2eu + 2fv + a_{00} = 0.$$

gemischt-quadr. Term xy ist weg.

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1\left(u^2 + 2\frac{e}{\lambda_1}u + \frac{e^2}{\lambda_1^2}\right) - \frac{e^2}{\lambda_1} + \lambda_2 v^2 + 2fv + a_{00} = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 v^2 + 2fv + a_{00} - \frac{e^2}{\lambda_1} = 0.$$

$\det A = \lambda_1\lambda_2$

$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\det B = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & e \\ 0 & \lambda_2 & f \\ e & f & a_{00} \end{vmatrix} = \lambda_1(\lambda_2 a_{00} - f^2) + e(-e\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2\left(a_{00} - \frac{f^2}{\lambda_2} - \frac{e^2}{\lambda_1}\right)$$

Ähnlichkeitstr. ändert det nicht

<u>Fall 1</u>. $\lambda_2 = 0 \quad f = 0$

$$\lambda_1\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 + a_{00} - \frac{e^2}{\lambda_1} = 0.$$

$$\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 = \frac{e^2}{\lambda_1^2} - \frac{a_{00}}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1^2}\left(e^2 - a_{00}\lambda_1\right)$$

rechte Seite positiv :	zwei parallele Geraden	rang $B = 2$
0 :	$u = -\frac{e}{\lambda_1}$ doppelt ... Gerade	rang $B = 1$
negativ :	leere Menge	rang $B = 2$

B ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & a_{00} \end{pmatrix}$

rechte Seite $= 0 \iff$ rang $B = 1$

<u>Fall 2</u>. $\lambda_2 = 0, \quad f \neq 0$.

$$\lambda_1 \left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 + 2 f v + a_{00} - \frac{e^2}{\lambda_1} = 0. \qquad \Big| : \lambda_1$$

$$\underbrace{\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)}_{=: r}{}^2 + 2 \frac{f}{\lambda_1} \underbrace{\left(v + \frac{1}{2f} a_{00} - \frac{e^2}{2 f \lambda_1}\right)}_{=: s} = 0.$$

Translation

$$r^2 + 2 \frac{f}{\lambda_1} s = 0$$

<u>Parabel</u>

$$\det B = -\lambda_1 f^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rang} B = 3$$

$\operatorname{rang} A = 1.$

14.6.2010

<u>Fall 3</u> $\quad \lambda_2 \neq 0,$

Forme

$$\lambda_1 \left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 v^2 + 2fv + a_{00} - \frac{e^2}{\lambda_1} = 0.$$

um und erhalte

$$\lambda_1 \left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(v + \frac{f}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{f^2}{\lambda_2} + a_{00} - \frac{e^2}{\lambda_1} = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(v + \frac{f}{\lambda_2}\right)^2 = -\frac{\det B}{\lambda_1 \lambda_2}. \qquad \Big| : \lambda_1 \lambda_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2}{\lambda_2} + \frac{\left(v + \frac{f}{\lambda_2}\right)^2}{\lambda_1} = -\frac{\det B}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

Fall 3a. $\det B = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Rechte Seite 0

$$\left(\frac{u + \frac{e}{\lambda_1}}{\sqrt{|\lambda_2|}}\right)^2 - \left(\frac{v + \frac{f}{\lambda_2}}{\sqrt{|\lambda_1|}}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{u + \frac{e}{\lambda_1}}{\sqrt{|\lambda_2|}} + \frac{v + \frac{f}{\lambda_2}}{\sqrt{|\lambda_1|}}\right)\left(\frac{u + \frac{e}{\lambda_1}}{\sqrt{|\lambda_2|}} - \frac{v + \frac{f}{\lambda_2}}{\sqrt{|\lambda_1|}}\right) = 0.$$

... Vereinigung zweier Geraden.

Da $\det A \neq 0$ und $\det B = 0$, folgt $\operatorname{rang} B = 2$

$\det A < 0$.

Fall 3b. $\det B \neq 0$ $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

$\operatorname{rang} B = 3$

$\det A < 0$.

Hyperbel.

Fall 3c. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ $\operatorname{sign}(\lambda_1) = \operatorname{sign}(\lambda_2) = -\operatorname{sign}(\det B)$.

$\Longrightarrow$ Ellipse.

$\det A > 0$

$\det B \cdot \operatorname{tr}(A) < 0$.

$\underbrace{\quad}_{\lambda_1+\lambda_2}$

Fall 3d $\lambda_1\lambda_2 > 0$ $\quad$ $\operatorname{sign}(\lambda_1) = \operatorname{sign}(\lambda_2) = -\operatorname{sign} \det B.$

$\Rightarrow$ Leere Menge.

$\det A > 0$

$\det B \operatorname{tr}(A) > 0.$

Fall 3e. $\lambda_1\lambda_2 > 0$ $\quad$ $\det B = 0.$

$\Rightarrow$ $u = -\frac{e}{\lambda_1}$ $\quad$ $v = -\frac{f}{\lambda_2}$ ... Schnittpunkt zweier orthogonaler Geraden, also 1 Punkt.

$\det A > 0$

$\operatorname{rang} B = 2$

Zusammenfassung.

rank A	det A	tr A det B	rank B = 3	rank B = 2	rank B = 1
2	< 0	egal	Hyperbel (3b)	Vereinig. zweier nicht. Ger. (3a)	—
2	> 0	< 0	Ellipse (3c)		
2	> 0	> 0	Leere Menge (3d)		

2	> 0	$\asymp 0$	—	Punkt (3e)		
1	$= 0$		Parallel (2)	parallele Geraden od leer (1)	Gerade doppelt (1)	