(14.6.2010)

Kap. 9. Eigenwertabschätzungen

9.1. Sensitivitätsanalyse

Satz 9.1 Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar, $T^{-1}AT = D$ T regulär, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

Sei $\Delta A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und μ ein Eigenwert von $A + \Delta A$ und $p \in \{1, 2, \infty\}$. Dann gilt

$$\min_j |\mu - \lambda_j| \le \kappa_p(T) \cdot \|\Delta A\|_p,$$

$\left(\kappa_p(T) = \|T\|_p \, \|T^{-1}\|_p\right)$ Konditionszahl

Beweis. Fall 1: μ ist EW von A. z.z.: $0 \le \kappa_p(T)\,\|\Delta A\|_p$ ✓

Fall 2: μ ist kein EW von A

$\Leftrightarrow$ $A - \mu I$ regulär.

Es ist $A + \Delta A - \mu I$ singulär

Wir wollen das Lemma aus 2.2. benutzen ($\|B\| < 1 \Rightarrow I - B$ regulär).

$$\underbrace{A+\Delta A-\mu I}_{\text{singulär}} = \underbrace{(A-\mu I)}_{\text{regulär}}\left(I - \left(-(A-\mu I)^{-1}\Delta A\right)\right),$$

also $\quad I - \left(-(A-\mu I)^{-1}\Delta A\right)$ singulär und daher

$$\begin{aligned}
1 &\le \left\|-(A-\mu I)^{-1}\Delta A\right\|_p \\
&\le \left\|(A-\mu I)^{-1}\right\|_p \left\|\Delta A\right\|_p \\
&= \left\|\left(TDT^{-1}-\mu I\right)^{-1}\right\|_p \left\|\Delta A\right\|_p = \\
&= \left\|\left(TDT^{-1}-\mu TIT^{-1}\right)^{-1}\right\|_p \left\|\Delta A\right\|_p = \\
&= \left\|\left(T(D-\mu I)T^{-1}\right)^{-1}\right\|_p \left\|\Delta A\right\|_p = \\
&= \left\|T\cdot(D-\mu I)^{-1}T^{-1}\right\|_p \left\|\Delta A\right\|_p \le \\
&\le \left\|T\right\|_p \left\|(D-\mu I)^{-1}\right\|_p \left\|T^{-1}\right\|_p \left\|\Delta A\right\|_p
\end{aligned}$$

$$= \kappa_p(T) \cdot \|\Delta A\|_p \; \left\| \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1-\mu}, \frac{1}{\lambda_2-\mu}, \dots, \frac{1}{\lambda_n-\mu}\right) \right\|_p$$

$$\overset{\text{Ü}14}{\leq} \kappa_p(T) \, \|\Delta A\|_p \, \max\left(\left|\frac{1}{\lambda_1-\mu}\right|, \dots, \left|\frac{1}{\lambda_n-\mu}\right| \right) =$$

$$= \kappa_p(T) \, \|\Delta A\|_p \, \frac{1}{\min\limits_j |\lambda_j - \mu|} \qquad \square$$

Beispiel. Sei $A = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Wir wissen: A ganz und gar nicht diagonalisierbar.
EW 0 algebr Vf n
geom Vf 1

Sei $\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \\ x & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ für ein $x > 0$

Best. EW von $A + \Delta A$

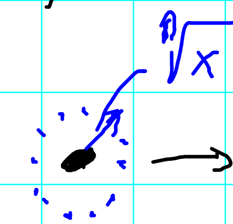
$$\det(A + \Delta A - tI) = \begin{vmatrix} -t & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ x & & & -t \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -t & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -t \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1}\, x \begin{vmatrix} 1 & & \\ -t & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & -t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-t)(-t)^{n-1} + (-1)^{n+1}\, x \cdot 1^{n-1} = (-1)^n \left(t^n - x\right).$$

Nullstellen: alle n komplexen n-ten Wurzeln von x, also

$$\mu_k = \sqrt[n]{x} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k}$$



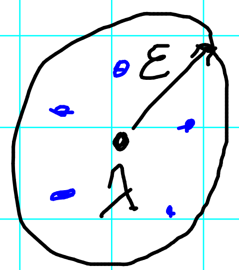
Beispiel: $n = 20$. $\quad x = 10^{-16}$

Abstand zu altem und neuem EW: $\sqrt[20]{10^{-16}} = 10^{-\frac{16}{20}} \approx 0.158$

d.h. ein Analogon zu Satz 9.1 für nicht-diagonalisierbare Matrizen muss sehr schlechte Abschätzungen ergeben.

Bemerkung. Satz 9.1 trifft für den Fall mehrfacher EW keinerlei einschlägige Aussage.

Satz 9.2. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, λ ein EW von A mit algebr. Vielfachheit r.
„Stetigkeit von EW" Weiters sei $\varepsilon > 0$, sodass es in $\overline{B_\varepsilon(\lambda)} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-\lambda| \le \varepsilon \}$ keine weiteren EW von A gibt.
Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A - C\| < \delta$ gilt, dass C genau r EW (inkl. algebr. Vf) in $\overline{B_\varepsilon(\lambda)}$ hat.



λ einziger EW von A.

(keine Stetigkeitsaussage, dafür aber mit Vielfachheiten)

Beweisskizze. Wir müssen Nullstellen des char. Poly inkl Vf im gegebenen Bereich zählen.

Lemma. Sei f ein Polynom, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, f besitze auf der Kreislinie $\partial B_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon \}$ keine Nullstelle.
Dann ist die Anzahl der Nullstellen von f in $B_\varepsilon(z_0)$ inkl algebr Vf gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f'(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})}{f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})}\,\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi$$

Beweisskizze des Lemmas siehe unten. ; allg. Beweis vgl LV komplexe Analysis, Prinzip vom Argument)

$p_A(t) = \det(A - tI) =$ Polynom in Einträgen von A und t

$\Longrightarrow$ $p_A(t) \approx p_C(t)$ für $A \approx C$ (Stetigkeit von Polynomen!)

$p_A(t)$ ... r-fache Nullstelle in $t = \lambda$; keine weiteren in $\overline{B_\varepsilon(\lambda)}$,

insbes. hat $p_A(t)$ keine Nullstelle in $\partial B_\varepsilon(\lambda)$

glm Stet von p_A .... für $\|C - A\| < \delta_0$: $p_C(t)$ keine Nullstelle in $\partial B_\varepsilon(\lambda)$

z.Z.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p_A'(z)}{p_A(z)} - \frac{p_C'(z)}{p_C(z)}\, dz \quad = 0$$

Da es keine halben Nullstellen gibt, reicht es zu zeigen, dass

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p_A'(z)}{p_A(z)} - \frac{p_C'(z)}{p_C(z)}\, dz\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Es reicht zu zeigen:

$$\left|\frac{p_A'(z)}{p_A(z)} - \frac{p_C'(z)}{p_C(z)}\right| < \frac{1}{2\varepsilon}$$

da Lf glm. Stetigkeit. ✓

<u>Beweisskizze für Lemma</u>.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \quad \dots$$ benötige Partialbruchzerlegung.

Nullstellen des Nenners interessieren nicht.

Sei α eine Nullstelle von $f(z)$ mit algebr. Vf $s \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad f(z) = (z-\alpha)^s g(z) \qquad g(\alpha) \neq 0.$$

$$f'(z) = s(z-\alpha)^{s-1} g(z) + (z-\alpha)^s g'(z).$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{s(z-\alpha)^{s-1} g(z) + (z-\alpha)^s g'(z)}{(z-\alpha)^s g(z)} = \frac{s}{(z-\alpha)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

kein Pol in α,
dafür in anderen NSt von $f(z)$

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ die NSt von f mit algebr. Vf. $s_1, \dots, s_m$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{s_1}{(z-\alpha_1)} + \dots + \frac{s_m}{(z-\alpha_m)}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{m} s_j \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-\alpha_j}$$

zu zeigen:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-\alpha_j} = \begin{cases} 1 \dots & |\alpha_j - z_0| < \varepsilon \\ 0 \dots & |\alpha_j - z_0| > \varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z-\alpha_j} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z-z_0+z_0-\alpha_j} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{(z-z_0)\cdot\left(1+\underbrace{\frac{z_0-\alpha_j}{z-z_0}}_{|\ \ |<1}\right)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{z-z_0}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\alpha_j-z_0}{z-z_0}\right)^k dz =$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha_j-z_0)^k}{2\pi i}\oint \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha_j-z_0)^k}{2\pi \cancel{i}}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^{-(k+1)} e^{-ik\varphi}\,\varepsilon\, d\varphi$$

alles außer Summ. $k=0$ fällt weg $=$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 1.$$

✓

9.2 Satz von Geršgorin

17.6.2010

Satz 9.3. (Geršgorin) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, setze

$$S_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \}$$

(Kreisscheibe um a_{ii} (Diagonalel.) mit Radius = Summe der Absolutbeträge der Nicht-Diagonalelemente dieser Zeile)

1) $\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

2) Wenn es ein $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass

$$\bigcup_{i\in I} S_i \cap \bigcup_{i\notin I} S_i = \emptyset,$$

dann sind genau $|I|$ Eigenwerte von A in $\bigcup_{i\in I} S_i$ (inkl. algebr. Vf gezählt) enthalten.

Beweis. 1) Sei λ ein Eigenwert von A, x ein Eigenvektor zum EW λ, oBdA $\|x\|_\infty = 1$. Wähle $i \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $|x_i| = 1$.

Es gilt $\quad Ax = \lambda x$

$\Longrightarrow \quad (Ax)_i = \lambda x_i$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = \lambda x_i - a_{ii} x_i$$

Somit:

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}| \cdot \underbrace{|x_i|}_{=1} = |\lambda x_i - a_{ii} x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \in S_i$$

jeder EW ist in Geršgorin-Scheibe. ✓

2) Setze $G = \bigcup_{i \in I} S_i$ $\qquad B = \bigcup_{i \notin I} S_i$

Schreibe $A = D + R$, wobei D Diagonalmatrix

R auf Diagonale lauter Nullen.

Für $t \in [0,1]$ setze

$$A_t = D + t \cdot R$$

Setze $f(t)$ = Anzahl der Eigenwerte von A_t (inkl. algebr. Vf), die in G enthalten sind.

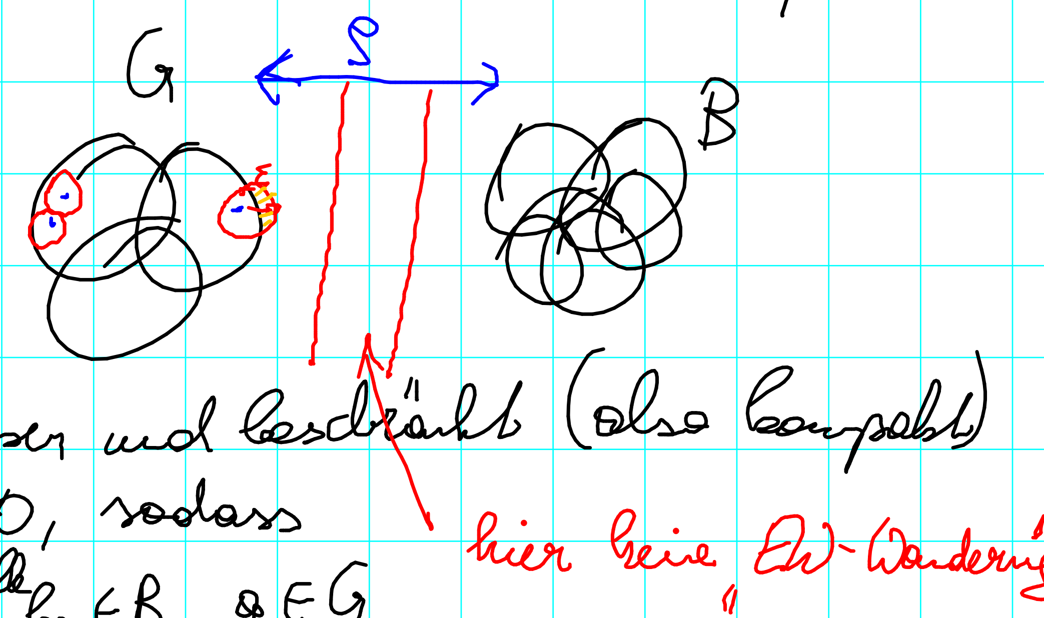
Für $t=0$: EW von A_0 sind Diagonalelemente

$\Longrightarrow f(0) = |I|$

zu zeigen ist $f(1) = |I|$

Behauptung: f ist stetig

(das reicht, weil stetige ganzz. Funktionen konstant sind).



<u>Beweis der Behauptung</u>.

Da G und B disjunkt, abgeschlossen und beschränkt (also kompakt) sind, gibt es ein $\rho > 0$, sodass

$|g - b| > \rho$ für alle $b \in B$, $g \in G$

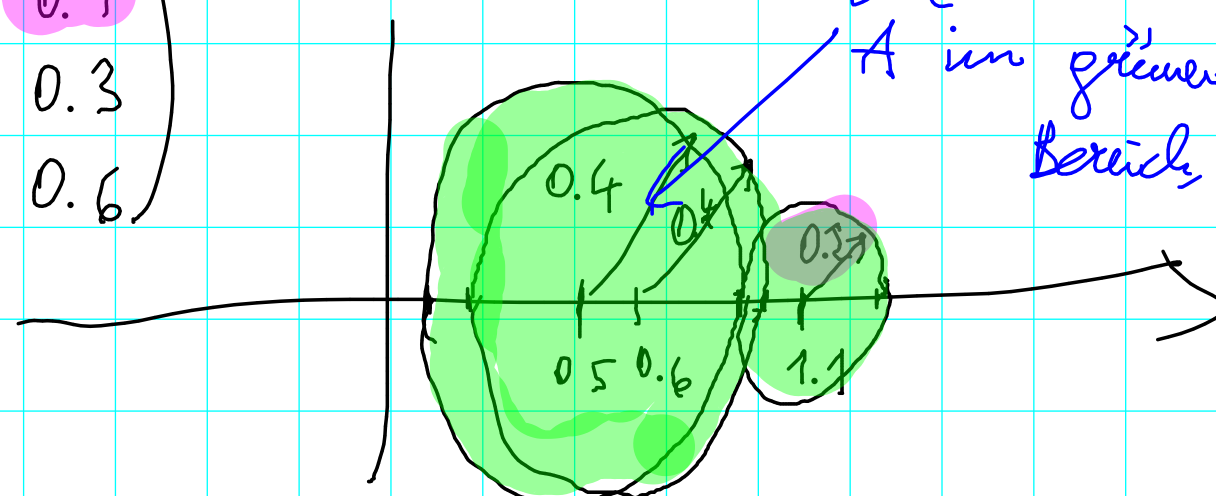
Sei $t_0 \in [0,1]$. Es gibt $f(t_0)$ EW inkl. algebr. Vf in G

Wähle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{\varrho}{3}$, sodass in jeder Kreisscheibe um ein EW von A_{t_0} vom Radius ε keine weiteren EW von A_{t_0}.
Laut Satz 9.2 (Stet. von EW) gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ in jeder dieser Kreisscheiben die „richtige" Anzahl von EW von A_t liegt.
Laut Geršgorin Teil 1 liegen alle EW von A_t in den Geršgorin-Scheiben von A_t. Diese sind in Geršgorin-Scheiben von A enthalten, Daher kein EW außerhalb von $G \cup B$.
Da $\varepsilon < \varrho/3$, können sich keine EW zwischen G und B hin- und herbewegen. $\Rightarrow$ $f(t) = f(t_0)$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
$\Rightarrow$ f ist stetig in t_0. Da t_0 beliebig war, folgt f stetig auf $[0,1]$.

$\square$

Beispiel 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$



alle EW von A im grünen Bereich

alle Realteile der EW sind positiv

Beispiel 1a.

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

gleiche Geršgorin-Scheiben

$A = A^t$

$\Rightarrow$ alle EW reell.

$\Rightarrow$ alle EW in $[0.1; 1.3]$

$\Rightarrow$ alle EW positiv $\Rightarrow$ A positiv definit.

Definition. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. A heißt (strikt positiv) diagonal dominant, wenn für $1 \le i \le n$

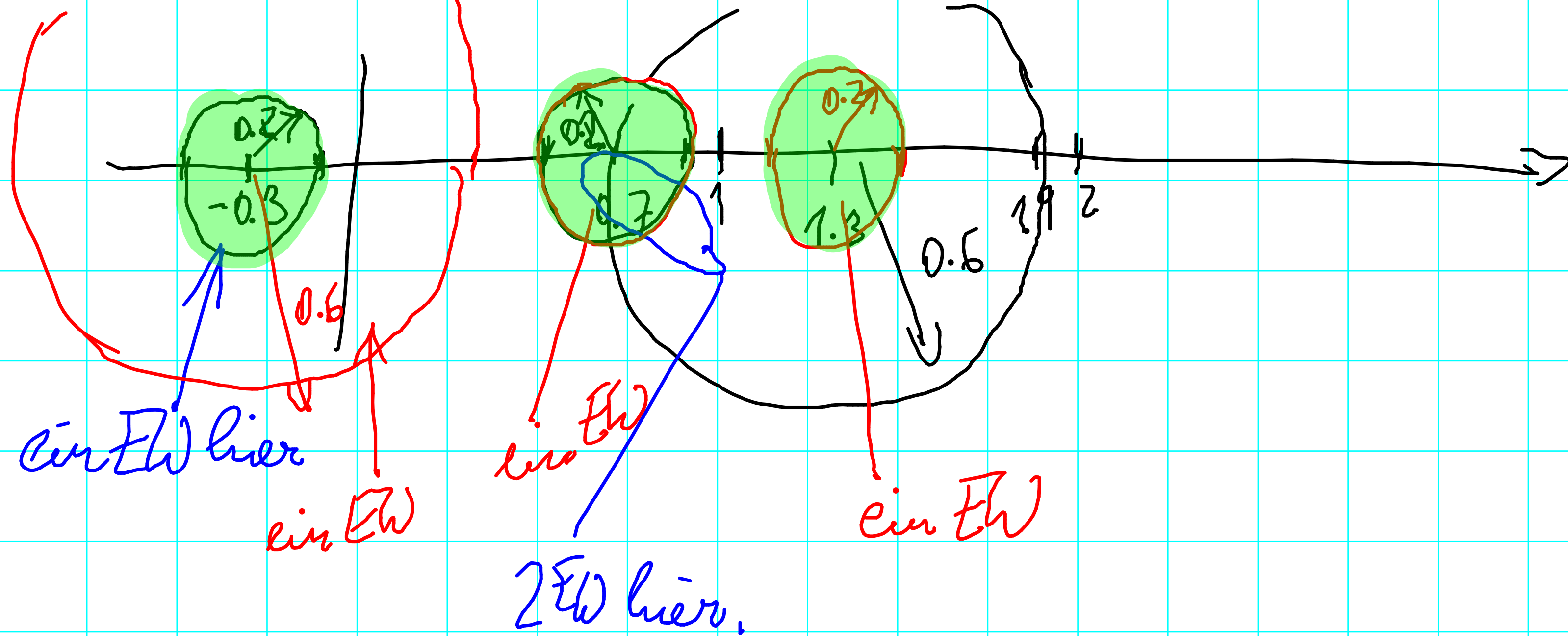
$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Korollar. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $A^* = A$. Wenn A diagonal dominant ist, dann ist A positiv definit.

Bew. Alle Geršgorin Kreise liegen in rechter Halbebene $x \geq 0$ von $\mathbb{C}$. $\square$

Beispiel 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$



A^t hat dieselben EW $\longrightarrow$ Geršgorin auf Spalten von A anw.

$\longrightarrow$ rote Kreise

Kombination der beiden Resultate: je ein EW im Scheiben

MP	-0.3	Radius 0.2
	0.7	–"–
	1.3	–"–