(17.6.2010)

Teil IV: Singulärwertzerlegung

Kap. 10: Singulärwertzerlegung.

10.1. Definition und einfache Eigenschaften

Definition. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $U \in \mathbb{K}^{m \times m}$ unitär, $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär, $S \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma_i & \text{für } i = j \end{cases}$$

und $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_\mu \geq 0$, wobei $\mu = \min(m,n)$.

Wenn $U^* A V = S$,
so heißt (U, S, V) eine Singulärwertzerlegung von A.
Die σ_i heißen Singulärwerte von A.

Bemerkung.

SWZ	unitäre Diag	Satz aus LinAlg 1, dass
$U^* A V = S$	$U^* A U = D$	jede lin. Abb. bzgl. geeigneter

Basen durch Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dargest. werden kann.

Bel. Matrix	quadr. Matrix	bel. Matrix,
versch. Basen	gleiche Basis in beiden Räumen	versch. Basen
Orthonormalbasen	Orthonormalbasen	irgendwelche Basen
σ_i nichtneg. sortiert haben Bedeutung (s. später)	irgendwelche Diagonalel. haben Bedeutung	fade Diagonalelement
alle Matrizen.	normale Matrizen	alle Abb.

Fragen
- existiert SWZ
- wie viel davon ist eindeutig
- Was sagen Singulärwerte aus?
- Anwendungen
- Berechnung ?

S

Vor Beweis der Existenz versuche Interpretation des größten Singulärwerts.

Sei (U,S,V) eine SWZ von A. $\quad A = USV^*$.

$$\Longrightarrow \|A\|_2 = \|USV^*\|_2 \overset{\text{Prop. nach Satz 4.3}}{=} \|S\|_2 \overset{\text{analog zu Ü14}}{=} \text{größter Eintrag von } S = \sigma_1$$

<u>Satz 10.1.</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann besitzt A eine SWZ.

<u>Beweis</u> Induktion nach m und n. (vgl. Schur-Zerlegung)

<u>Induktionsbasen:</u>

<u>$m=1$.</u>

$$A = \begin{pmatrix} \quad a^* \quad \end{pmatrix} = \|a^*\| \cdot \begin{pmatrix} \frac{a^*}{\|a\|} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}_{\substack{1\times 1 \\ \text{unitär}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \|a^*\| & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a^*}{\|a^*\|} \\ \\ \text{egal} \\ \end{pmatrix}}_{\substack{n \times n \\ \text{unitär}}}$$

egal ← irgendeine Ergänzung von $\frac{a^*}{\|a\|}$ zu ONB von K^n

$\underline{n=1}$. A^* hat SWZ (U, S, V).

$$A^* = U S V^*$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{V}_{\text{unitär}} \underbrace{S^*}_{} \underbrace{U^*}_{\text{unitär}}$$

richtige Größe, richtige Einträge ✓

Induktionsschritt $(m-1)\times(n-1) \longrightarrow m\times n$,

(Suche $AV = US$, also $Av_1 = \sigma_1 u_1$ $\quad$ u_1, v_1 1. Spalten von U bzw V.

u_1 normiert, v_1 normiert $\quad \|u_1\|_2 = 1 \quad \|v_1\|_2 = 1$

$$\|A\|_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lt Def } \|\ \|_2}}{\geq} \frac{\|Av_1\|_2}{\|v_1\|_2} = \frac{\|\sigma_1 u_1\|_2}{1} = |\sigma_1|\cdot\|u_1\|_2 = \sigma_1\, 1 = \sigma_1 = \|A\|_2 .$$

Also gilt $\|A\|_2 = \dfrac{\|Av_1\|_2}{\|v_1\|_2}$. $\quad$ v_1 realisiert also 2-Norm von A.)

Wir wissen:

$$\|A\|_2 = \max\{\ \|Ax\|_2 \mid \|x\|_2 = 1\}$$

Sei v ein Vektor mit $\|v\|_2 = 1$ und $\|Av\|_2 = \|A\|_2$.

Setze $Av = \sigma u$ für ein u mit $\|u\|_2 = 1$ und $\sigma = \|Av\|_2 = \|A\|_2$.

Ergänze u zu einer ONB von $\mathbb{K}^m$

v zu ——"—— von $\mathbb{K}^n$

Unitäre Matrizen $U_1 = \begin{pmatrix} u & \tilde{U} \end{pmatrix}$

$V_1 = \begin{pmatrix} v & \tilde{V} \end{pmatrix}$

Setze $B = U_1^* A V_1 = \begin{pmatrix} u^* \\ \tilde{U}^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v & \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \\ \tilde{U}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma u & A\tilde{V} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \sigma \underbrace{u^* u}_{=1} & u^* A \tilde{V} \\ \sigma \tilde{U}^* u & \tilde{U}^* A \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & w^* \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

u steht normal auf Spalten von $\tilde{U}$

$w^* = u^* A \tilde{V}$

$C = \tilde{U}^* A \tilde{V}$.

Betrachte den Vektor $\begin{pmatrix} \sigma \\ w \end{pmatrix}$.

$$\sigma^2 = \|A\|_2^2 = \|B\|_2^2 \geq \frac{\left\| B \begin{pmatrix} \sigma \\ w \end{pmatrix} \right\|_2^2}{\left\| \begin{pmatrix} \sigma \\ w \end{pmatrix} \right\|_2^2} =$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} \sigma^2 + w^* w \\ Cw \end{pmatrix} \right\|_2^2}{\sigma^2 + w^* w} = \frac{(\sigma^2 + w^* w)^2 + \overbrace{\|Cw\|_2^2}^{\geq 0}}{\sigma^2 + w^* w} \geqslant \frac{(\sigma^2 + w^* w)^2}{\sigma^2 + w^* w} =$$

$$= \sigma^2 + w^* w \qquad \Longrightarrow \qquad \|w\|_2^2 = w^* w \leq 0 \Rightarrow w = 0$$

21.6.2010

also: $$U_1^* A V_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = B.$$

Lt. Induktionsannahme gibt es unitäre Matrizen $U_2 \in \mathbb{K}^{(m-1)\times(m-1)}$ und $V_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, sodass

$$U_2^* C V_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\mu \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu = \min(m,n)$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_\mu \geq 0,$$

wobei $\sigma_2 = \|C\|_2$.

Somit gilt mit $V = V_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & V_2 \end{array}\right)$ $\quad U = U_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & U_2 \end{array}\right)$ (U und V sind unitär, $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$), dass

$$U^*AV = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right) U_1^* A V_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & V_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \sigma & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V_2 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma & \\ & U_2^* C V_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} \sigma & & & \\ \hline & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_\mu \end{array}\right) \qquad \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_\mu \geq 0.$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass $\sigma \geq \sigma_2$.

$$\sigma = \|A\|_2 = \|U^*AV\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_\mu \end{pmatrix} \right\|_2 = \max\{\sigma, \sigma_2, \dots, \sigma_\mu\}$$

(somit auch $\sigma \geq \sigma_2$) $\square$

Proposition. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, (U, S, V) eine Singulärwertzerlegung von A, $\mu = \min(m,n)$. Sei $U = (u_1, \dots, u_m)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$.
$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\mu \end{pmatrix}$. Dann gilt:

1) $\|A\|_2 = \sigma_1$

2) Die Spalten von V bilden eine ONB von Eigenvektoren von A^*A und die EW von A^*A sind $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_\mu^2, 0, \dots, 0$ ($n-\mu$ Nullen)

3) Die Spalten von U bilden eine ONB von EV von AA^* und die EW von AA^* sind $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_\mu^2, 0, \dots, 0$ ($m-\mu$ Nullen).

4) Für $1 \le j \le \mu$ gilt $Av_j = \sigma_j u_j$.

5) $\|A\|_2 = \sqrt{\max(\sigma(A^*A))} = \sqrt{\max(\sigma(AA^*))}$

<u>Beweis</u> 1) siehe oben (vor Beweis von Satz 10.1).

2) $A = USV^*$

$A^* = VS^*U^*$

$$A^*A = VS^*\underbrace{U^*U}_{I}SV^* = VS^tSV^* = V\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_\mu^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}V^*$$

($n-\mu$ Nullen)

$$\Rightarrow \quad V^*(A^*A)V = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_\mu^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\mu})$$

3) analog zu 2 oder 2 auf A^* anwenden.

4) $AV = US$

$$A(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_m)\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\mu \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(Av_1 \; Av_2 \; \dots \; Av_n) = (\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_\mu u_\mu, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-\mu})$$

5) folgt aus 1, 2, 3. $\square$

<u>Korollar.</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann sind die SW $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_\mu$ von A eindeutig

bestimmt

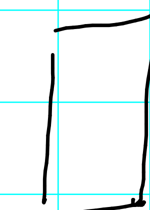
(Seien (U_1, S_1, V_1) und (U_2, S_2, V_2) zwei SWZ von A. Dann gilt $S_1 = S_2$).

Beweis. $\sigma_1^2, \dots, \sigma_\mu^2$ sind als EW von A^*A (und AA^*) eind. festgelegt. Da $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_\mu \geq 0$, gibt es weder bei Sortierung noch bei Wurzelziehen Probleme. $\square$

Bemerkung 1. Eindeutigkeit von U und V ist nicht zu erhoffen; Multiplikation von Spalten mit -1 (oder andere Zahl am Einheitskreis) kein Problem.

Krasser Fall:

$$0 = U \, 0 \, V^*$$ für bel. unitäre U und V.

Bemerkung 2. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $m > n$  .

QR-Zerlegung: $A = Q \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Q unitär, R_1 obere Dreiecksmatrix.

muss nur noch R_1 Singulärwertzerlegen.

Es reicht also, quadratische Matrizen SWZen zu können.

Bemerkung 3

$$n-\mu = \begin{cases} 0 \;\ldots\; n \leq m \\ n-m \;\ldots\; n \geq m \end{cases} \qquad m-\mu = \begin{cases} 0 \;\ldots\; m \leq n \\ m-n \;\ldots\; n \leq m \end{cases}.$$

Bemerkung 4 Obige Proposition (kombiniert mit etwas Hinschauen) ermöglicht SWZ von netten Matrizen.

10.2. Anwendungen der SWZ

10.2.1. Über- und unterbestimmte GLS

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$.

Definition Ein $x \in \mathbb{K}^n$ heißt Lösung des über- und unterbestimmten GLS „$Ax = b$", wenn

- „$\|Ax - b\|_2$" ist minimal, also $\forall y \in \mathbb{K}^n$: $\|Ax-b\|_2 \leq \|Ay-b\|_2$.
- $\|x\|_2 \leq \|z\|_2$ für alle z mit $\|Ax-b\|_2 = \|Az-b\|_2$.

Beispiel.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

überbest. (offensichtlich keine Lsg)
unterbest. ($(x+1, y-1)$ ist genauso gut)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rank} A = 1,$$

24.6.2010

Sei (U, S, V) eine SWZ von A, also $U^* A V = S$

$$\|Ax - b\|_2^2 \underset{U^* \text{ unitär}}{=} \|U^*(Ax-b)\|_2^2 = \|(U^* A \underbrace{V)V^*}_{=I} x - U^* b\|_2^2 =$$

$$= \|Sy - c\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 - c_1 \\ \sigma_2 y_2 - c_2 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r - c_r \\ -c_{r+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$V^* x =: y$

$\Leftrightarrow x = Vy$

$c := U^* b$

$\sigma_r > 0$

$\sigma_{r+1} = 0$ oder existiert nicht

(σ_r letzte positive SW).

$$= |\sigma_1 y_1 - c_1|^2 + \dots + |\sigma_r y_r - c_r|^2 + |c_{r+1}|^2 + \dots + |c_m|^2$$

Das ist genau dann minimal, wenn $y_1 = \frac{c_1}{\sigma_1}, \dots, y_r = \frac{c_r}{\sigma_r}$,

$y_{r+1}, \dots, y_n$ haben keinen Einfluss auf $\|Ax - b\|_2$.

Zweites Ziel: $\|x\|_2 \to \min$,

$$\|x\|_2^2 = \underset{V \text{ unitär}}{\|Vy\|_2^2 = \|y\|_2^2} = \underbrace{|y_1|^2 + \dots + |y_r|^2}_{\text{bereits fixiert}} + |y_{r+1}|^2 + \dots + |y_n|^2 =$$

$$= \left|\frac{c_1}{\sigma_1}\right|^2 + \dots + \left|\frac{c_r}{\sigma_r}\right|^2 + |y_{r+1}|^2 + \dots + |y_n|^2$$

Das ist genau dann minimal, wenn $y_{r+1} = \dots = y_n = 0$.

Wir haben also

$$y = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{c_r}{\sigma_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{{}^{n}\Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{m}}_{=: S^+} \cdot c$$

$$\Longrightarrow \quad y = S^+ c$$

$$x = Vy = VS^+ c = VS^+ U^* b$$

Definition. 1) Sei $S \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $s_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \dots\ i=j \\ 0 & \dots\ \text{sonst} \end{cases}$ mit

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ und $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m,n)} = 0$. Dann

setze $S^+ \in \mathbb{K}^{n \times m}$ mit Einträgen $s^+_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} & \dots\ i=j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

2) Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, (U, S, V) eine Singulärwertzerlegung von A. Dann setze

$$A^+ = V S^+ U^*$$

„Pseudoinverse von A".

Satz 10.2. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$, dann gibt es genau eine Lösung x des „über-" und unterbestimmten linearen Gleichungssystems „$Ax = b$" (im Sinne der kl. Fehlerquadr.), nämlich

$$x = A^+ b.$$

Beweis siehe oben. $\square$

<u>Bemerkung.</u> A^+ könnte von gewählter SWZ (U,S,V) abhängen, andererseits ist A^+b die Lösung von „$Ax=b$" $\rightsquigarrow$ die ist eind. bestimmt, somit A^+b für alle b von gew. SWZ unabhängig, somit hängt A^+ nicht von gew. SWZ ab (wähle nacheinander $b=e_1, \dots, b=e_m$).

Wie hängt das mit Pseudoinverser $(A^*A)^{-1}A^*$ für Matrizen $A \in K^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank} A = n$ zusammen?

Sei (U,S,V) eine SWZ von A. $A=USV^*$

$$(A^*A)^{-1}A^* = (VS^*U^*USV^*)^{-1}VS^*U^* =$$
$$= (VS^*SV^*)^{-1}VS^*U^* =$$
$$= V(S^*S)^{-1}\underbrace{V^{-1}V}_{I}S^*U^* = V(S^*S)^{-1}S^*U^*.$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & & \end{pmatrix} \qquad S^* = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{pmatrix}$$

$$(S^*S)^{-1}S^* = \left(\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \vdots \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)^{-1}\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{array}\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n^2}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1/\sigma_n & \end{array}\right) = S^+$$

Also in diesem Fall: $(A^*A)^{-1}A^* = A^+$ ✓

billiger mit Rückwärtsargument: sowohl $(A^*A)^{-1}A^*b$ als auch A^+b ergeben die eindeutige Lsg von „$Ax = b$" i. S. d. kl. Fp für jedes b, also „$(A^*A)^{-1}A^* = A^+$"

10.2.2. Kern, Bild, Rang.

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, (U,S,V) eine SWZ von A, r die Anzahl der positiven Singulärw.

$U = (u_1, \ldots, u_m)$ $\qquad V = (v_1, \ldots, v_n)$.

$$x \in \operatorname{Ker} A \iff Ax = 0 \iff USV^* x = 0 \iff SV^* x = 0 \underset{V^*x = y}{\iff} \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff y_1 = \ldots = y_r = 0, \quad y_{r+1}, \ldots, y_n \text{ egal} \iff x = V \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_{r+1} v_{r+1} + \ldots + y_n v_n$$

für $y_{r+1}, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$\iff x \in \operatorname{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}.$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}.$$

$$b \in \operatorname{Im} A \iff \exists x \in \mathbb{K}^n : \; b = Ax \iff \exists x \in \mathbb{K}^n : b = USV^* x$$

$\overset{V\text{ regulär}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists y \in \mathbb{K}^n: \quad b = USy = U \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\sigma_1 y_1) \cdot u_1 + \dots + (\sigma_r y_r) u_r$

$\sigma_1 y_1, \dots, \sigma_r y_r \in \mathbb{K}^n$ beliebig $\Longleftrightarrow$ $b \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}$.

$\Longrightarrow \quad \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}$.

(hätte man auch aus Satz 10.2 herausarbeiten können).

<u>Proposition</u>. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, (U, S, V) eine SWZ von A, r die Anzahl der positiven Singulärwerte, $U = (u_1, \dots, u_m)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$. Dann gilt:

1) $v_{r+1}, \dots, v_n$ ist Orthonormalbasis von $\operatorname{Ker} A$
2) $u_1, \dots, u_r$ ist —— // —— von $\operatorname{Im} A$
3) $r = \operatorname{rang} A$.

<u>10.2.3. Numerischer Rang</u>

Frage: Sei A mit Singulärwerten
$$24,\ 6,\ \frac{1}{2010},\ 10^{-6},\ 10^{-24},\ 10^{-2010},\ 0, \ldots, 0.$$

Laut obiger Proposition gilt $\operatorname{rang} A = 6$, wenn man glaubt, dass $10^{-2010} > 0$. Das ist in $\mathbb{R}$ wahr, bei numerischer Rechnung eher nicht.

Je nach Entscheidung erhält man $\operatorname{rang} A = 6$, $\operatorname{rang} A = 5$ oder $\operatorname{rang} A = 4$.
Was heißt das für A?

Satz 10.3. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_\mu$, $\mu = \min\{m,n\}$.
Für $0 \leq k \leq \mu - 1$ gilt

$$\sigma_{k+1} = \min\left\{ \|A - B\|_2 \;\middle|\; B \in \mathbb{K}^{m\times n} \text{ mit } \operatorname{rang} B \leq k \right\}.$$

Beweis 1) Sei (U, S, V) eine SWZ von A, also

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\mu \end{pmatrix} V^*$$

Setze $B = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} V^*$. $\Rightarrow \operatorname{rank} B \leq k$.

$$\|A - B\|_2 = \left\| U \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \sigma_{k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sigma_\mu \end{pmatrix} V^* \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \sigma_{k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sigma_\mu \end{pmatrix} \right\|_2 = \sigma_{k+1},$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{k+1} \geq \min \left\{ \|A - C\|_2 \;\middle|\; C \in \mathbb{K}^{m \times n} \text{ mit } \operatorname{rank} C \leq k \right\}.$$

2) Sei $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\operatorname{rank} C \leq k$.

Betrachte

$$\underbrace{\operatorname{Ker} C}_{\dim \geq n-k} \cap \underbrace{\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}}_{\text{Dimension } = k+1} \neq \{0\},$$

sonst wäre $\operatorname{Ker} C \oplus \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ direkte Summe der Dimension $\geq n - k + k + 1 = n+1$ im $\mathbb{K}^n$. Wid.

Somit gibt es ein $z \neq 0$ mit $z \in \operatorname{Ker} C \cap \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$, oBdA sei $\|z\|_2 = 1$.

Es gilt:

$$\|A - C\|_2 \geq \|(A-C)z\|_2 = \|Az - Cz\|_2 = \|Az\|_2 =$$

$$= \|USV^* z\|_2 = \|Sy\|_2$$

$$\overset{y = V^* z}{\iff} z = Vy = (v_1, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Da $z \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$, folgt $y_{k+2} = \dots = y_n = 0$.

$$\|Sy\|_2^2 = |\sigma_1 y_1|^2 + |\sigma_2 y_2|^2 + \dots + |\sigma_{k+1} y_{k+1}|^2 \geq$$

$$\geq \sigma_{k+1}^2 \left(|y_1|^2 + \dots + |y_{k+1}|^2 \right) = \sigma_{k+1}^2 \|y\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2 \|z\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2.$$

$$\Longrightarrow \|A - C\|_2 \geq \sigma_{k+1}$$

$\square$

10.2.4. Bildkompression

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix, deren Einträge Graustufenwerte eines Bildes sind (oder Rot / Grün / Blau).

Sei (U, S, V) eine SWZ von A, also $A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\mu \end{pmatrix} V^* =$

$$= (u_1, \ldots, u_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_\mu & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \ldots + \sigma_\mu u_\mu v_\mu^*.$$

Für kleine σ_k ist Beitrag vernachlässigbar, vergessen wir diese

Wählen wir also genau Singulärwerte

Speichere $\underbrace{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}_{k}, \underbrace{u_1, \ldots, u_k}_{km}, \underbrace{v_1, \ldots, v_k}_{kn}.$

Speicherbedarf: $k(1+m+n)$.

Originaler Speicherbedarf $m \cdot n$

Wenn $k < \frac{\mu}{2}$, so werden wir gewinnen

<u>Bemerkung.</u> Es gibt bessere Verfahren.