(24.6.2010)

Zurück in Teil III. Eigenwerte

Kap 11. Eigenwerte nichtnegativer Matrizen.

11.1. Irreduzible Matrizen

In diesem Kapitel verwende Notationen:
Wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so schreibe

$$A \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{jeder Eintrag von } A \text{ ist } \geq 0$$
$$A > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{jeder Eintrag von } A \text{ ist } > 0.$$

Achtung: $A \geq 0 \ \wedge \ A \neq 0 \quad \not\Longrightarrow \quad A > 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ aber} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \not> \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

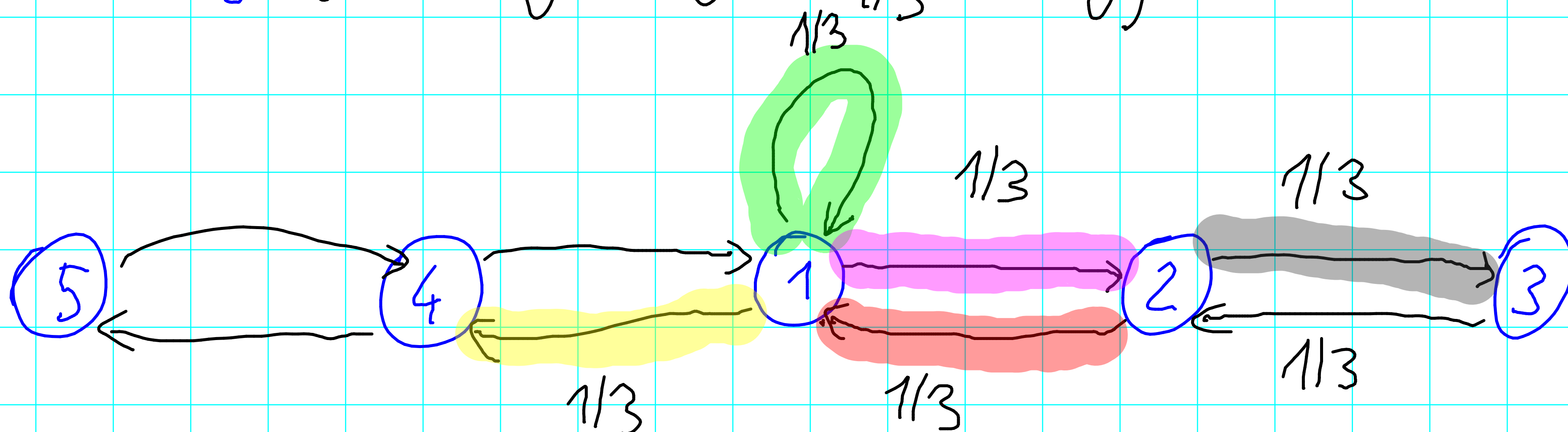
Analog: $A \geq B \quad (\Longleftrightarrow A - B \geq 0) \qquad A > B$ usw

Definition. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$. Der zu A assoziierte gerichtete Graph ist der Graph mit Knoten $V=\{1,\dots,n\}$ und Kanten

$$E=\{(i,j) \mid a_{ij}>0\}.$$

Beispiel.

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Kann als Wahrscheinlichkeit gedeutet, von Zustand i nach Zustand j gehe.

28.6.2010

<u>Definition:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann heißt A reduzibel, wenn es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass

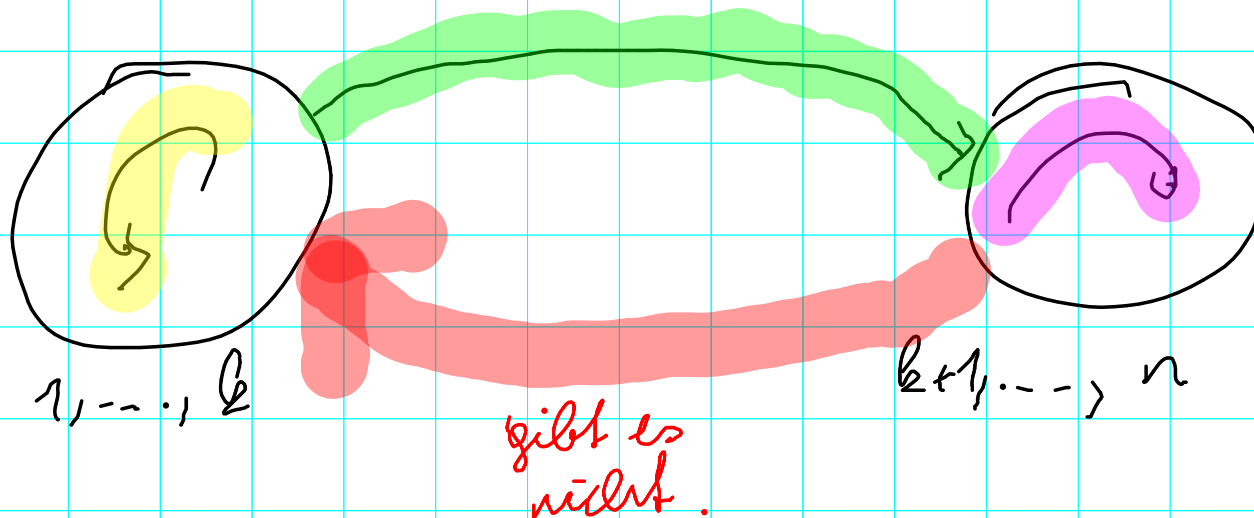
$$P^{-1}AP = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$

für passende $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ und $1 \le k \le n-1$.
Andernfalls heißt A irreduzibel.

Was heißt das für den zugeh. gerichteten Graphen?
Der Basiswechsel mit P entspricht genau einer Umnummerierung der Knoten.
Die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

heißt, dass es keine Kanten von einem der Knoten (nach Umnummerierung) $\{k+1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, k\}$ gibt.



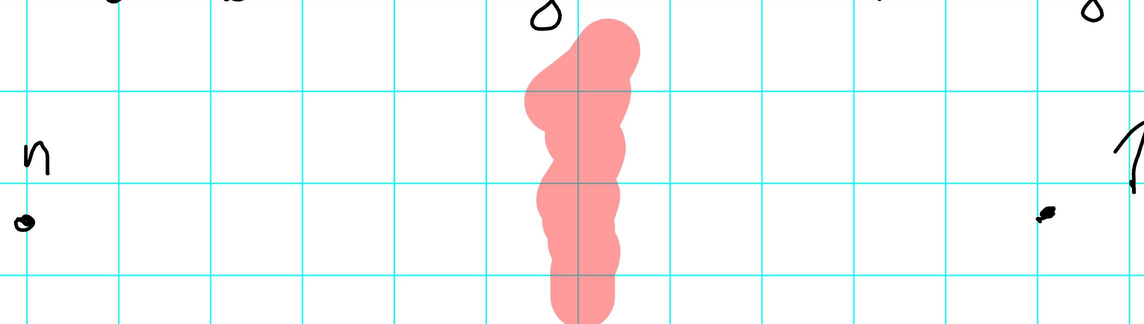
Bei reduziblen Matrizen zerfällt z.B. das Irrfahrtsproblem in Teilprobleme.

Lemma. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$. Dann ist A genau dann irreduzibel, wenn der zugehörige gerichtete Graph stark zusammenhängend ist, d.h. es einen gerichteten Weg zwischen je zwei Knoten gibt.

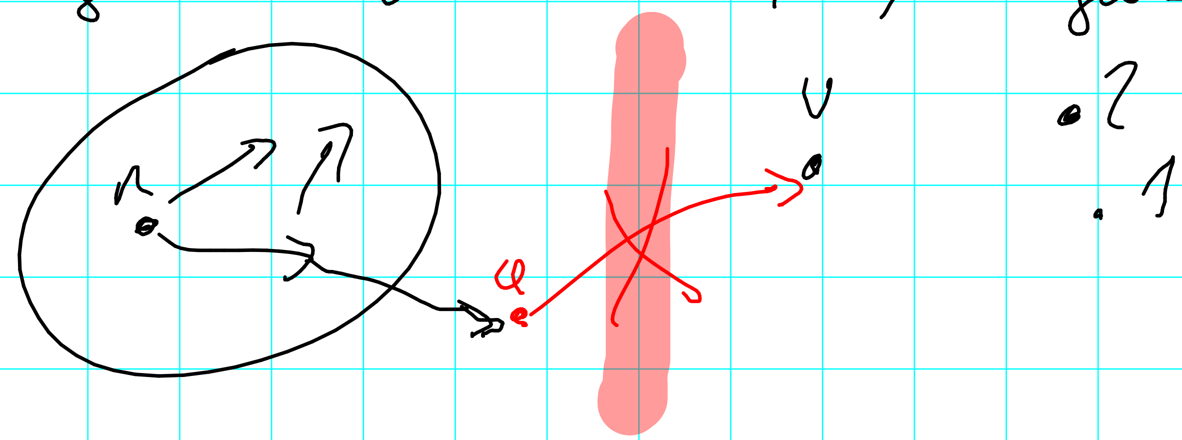
Beweis. „reduzibel $\Rightarrow$ nicht stark zh.": siehe oben

„nicht stark zh $\Rightarrow$ reduzibel":

Nach Annahme gibt es zwei Knoten, nach Umnummerierung heißen sie n und 1, sodass es keinen ger. Weg von n nach 1 gibt.



Numeriere Knoten nochmals so um, dass es einen Weg von n zu jedem der Knoten $k+1,\dots,n$ gibt und keinen Weg von n zu irgendeinem der Knoten $1,\dots,k$ gibt



Dann gibt es keine Kante (u,v) mit $u\in\{k+1,\dots,n\}$ und $v\in\{1,\dots,k\}$

d.h. die Matrix hat genau die Gestalt einer reduziblen Matrix

$\square$

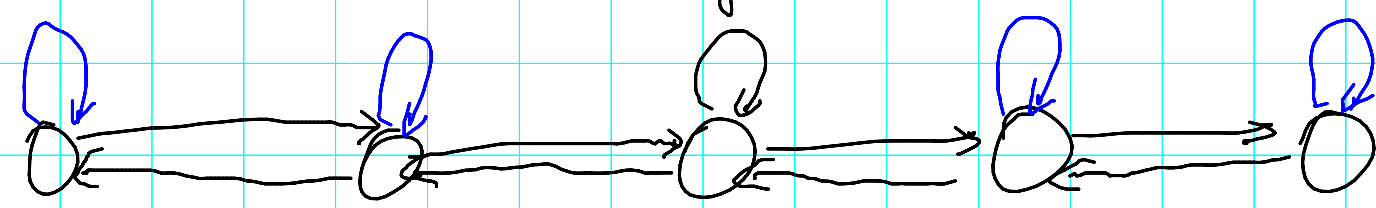
ad Bsp.: Der Graph ist stark zh $1\to2\to3\to2\to1\to4\to5\to4\to1$, weil es einen Kreis durch alle Knoten gibt,

Lemma. Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A\geq 0$, A irreduzibel, Dann gilt

$$(A+I)^{n-1}>0$$

Beweis. Setze $B=A+I$, G der Graph zu A, H der Graph zu B.

Da offensichtlich alle Diagonalelemente von B positiv sind und die Nicht-Diagonalelemente von A und B gleich sind, ist $H = G$ + Schlaufen in jedem Knoten.



Was tun Matrizenpotenzen B^k. ?

Beh. $(B^k)_{ij}$ = „Anzahl" der Wanderungen von i nach j der „Länge k in H.

$= \sum_{\substack{p \text{ Wanderung} \\ \text{von } i \text{ nach } j}}$ Produkt der Einträge auf Wanderung.

Wanderung $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$

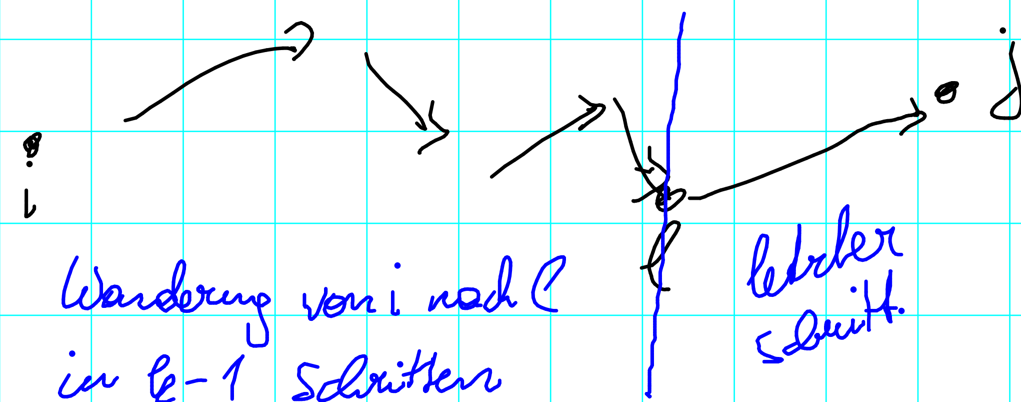
führt zu Summanden $b_{12} b_{21} b_{13}$

(Wahrsch.-Modell: Wahrscheinlichkeit, in k Schritten von i nach j zu kommen (für festes k).

Bew. durch Induktion nach k

$k = 1$. es gibt ~~nur~~ höchstens eine Wanderung von i nach j, nämlich Kante (i,j), und die gibt es genau dann, wenn $b_{ij} > 0$.

$k-1 \to k$ Wanderungen von i nach j in k Schritten:



ℓ … letzter Knoten vor dem Ziel,

$$\sum_{\substack{p \text{ Wanderung}\\ \text{von } i \text{ nach } j\\ \text{in } k \text{ Schritten}}} \text{Produkt Einträge } p = \sum_{\ell=1}^{n} \Bigg(\sum_{\substack{p' \text{ Wanderung}\\ \text{von } i \text{ nach } \ell\\ \text{in } k-1 \text{ Schritten}}} \text{Produkt Einträge}(p') \Bigg) \cdot b_{\ell j} =$$

$$\overset{\text{Ind. Ann.}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} B^{k-1}_{i\ell} \cdot b_{\ell j} \underset{\text{Matr. Mult.}}{\overset{\uparrow}{=}} B^{k}_{ij}$$

$\boxed{\text{Bew}}$

Betr. B^{n-1}.

Seien i, j zwei Knoten von H. Es gibt einen Weg von i nach j der Länge $\leq n-1$.
Wegen der Schlaufe in j gibt es Wanderung von i nach j der Länge $= n-1$.

$$\Longrightarrow \left(B^{n-1}\right)_{ij} = \underbrace{\overbrace{\text{Produkt Einträge oben betrachtete Wanderung}}^{>0} + \underbrace{\text{weitere Summanden}}_{\geq 0}}_{>0}.$$

$$\Longrightarrow B^{n-1} > 0.$$

$\square$

11.2 Satz von Perron-Frobenius, Teil I

Satz 11.1 (Perron-Frobenius). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$, A irreduzibel, $\rho(A)$ der Spektralradius von A (also Betrag des betragsgrößten Eigenwerts).
Dann ist $\rho(A)$ ein Eigenwert von A der algebraischen Vf 1 und es gibt einen Eigenvektor x von A zum Eigenwert $\rho(A)$ mit $x > 0$.

Vor dem Beweis ein paar Lemmata und Definitionen.

1) Für $x \geq 0$, $(x \in \mathbb{R}^n)$, $x \neq 0$ setze

$$r(x) = \min \left\{ \frac{(Ax)_j}{x_j} \;\middle|\; j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } x_j \neq 0 \right\}.$$

2) $P = (A+I)^{n-1}$. Lt Lemma oben gilt $P > 0$.

Weiters gilt $AP = PA$.

$$\Big(A \cdot P = (A+I-I)P = (A+I)P - IP = (A+I)^n - P = $$
$$= P \cdot (A+I) - P \cdot I = P(A+I-I) = PA \Big)$$

Lemma 1. Es gibt ein $y > 0$ mit $r(y) = \max\{ r(x) \mid x \geq 0, x \neq 0 \}$.

Beweis.

$\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ x \neq 0\}$.

$\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\|_2 = 1\}$ (Einheitskugel $\cap\ \mathcal{H}$).

$\mathcal{G} := P \cdot \mathcal{K}$

$\varrho := \sup\{r(x) \mid x \in \mathcal{H}\}$.

1) Für $x \in \mathcal{H}$ ist $r(x)$ die größte Zahl s mit $sx \leq Ax$.

Bew.

$$r(x) \leq \frac{(Ax)_j}{x_j} \quad \text{für alle } x_j \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad r(x)\, x_j \leq \underbrace{(Ax)_j}_{\geq 0} \quad \text{—— " ——}, \quad \text{für } x_j = 0 \text{ gilt das auch.}$$

Da $r(x) = \min\limits_{\cdots} \ldots$, gilt das für ein j mit Gleichheit (und $x_j \neq 0$) $\boxed{1}$

2) r ist homogen vom Grad 0, d.h. $\forall x \in \mathcal{H}, \alpha > 0: r(\alpha x) = r(x)$.

Bew.

$$r(\alpha x) = \min_{x_j \neq 0} \frac{(\cancel{\alpha} A x)_j}{\cancel{\alpha} x_j} = r(x) \qquad \boxed{2}$$

3) $\varrho = \sup\{r(x) \mid x \in \mathcal{K}\}$

Bew. $\quad \varrho \geq \sup\{r(x) \mid x \in K\}$, weil $K \subseteq H$

Für $x \in H$ gilt

$$r(x) = r\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \overset{2)}{=} r\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in K}\Big) \leq \sup\{r(y) \mid y \in K\}$$

Also auch sup über $x \in H$: $\qquad \varrho \leq \sup\{r(y) \mid y \in K\}$. $\boxed{3}$

4) $\quad r(x)$ ist stetig auf $\{x \in H \mid x > 0\}$,

Bew. Minimum stetiger Fn ist stetig, da alle Nenner > 0, haben wir keine Probleme. $\boxed{4}$

Leider liegt $\underset{\text{kompakt}}{K}$ nicht in $\underbrace{\{x \in H \mid x > 0\}}_{\text{hier ist } r \text{ sicher stetig}}$, sonst wären wir fast fertig.

5) $\quad G = P \cdot K$ ist kompakt und r ist stetig auf G.

Bew. $\quad F_P$ ist stetig, K kompakt, stet. Bild kpter Menge ist kompakt, also G kompakt.

Sei $x \in K$, also $x \geq 0$, aber $x \neq 0$. Dann ist

$$\underbrace{P}_{P>0}\underbrace{x}_{\substack{\geq 0 \\ \neq 0}} > 0,$$

$$\Longrightarrow \mathcal{G} \subseteq \{x \mid x > 0\}$$ $\boxed{5}$

6) Für $x \in K$ gilt $\quad r(x) \leq r(Px) \leq \varrho$.

Bew. • $r(Px) \leq \varrho$ folgt aus $Px \in \mathcal{H}$ und Def von ϱ.

• Ü 1 gilt
$$
\begin{aligned}
& r(x)x \leq Ax \\
\Longleftrightarrow\ & Ax - r(x)x \geq 0 \\
\Longrightarrow\ & P(Ax - r(x)x) \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & PAx \geq r(x)Px \\
\Longleftrightarrow\ & A(Px) \geq r(x)(Px) \\
\overset{\text{Ü 1.}}{\Longrightarrow}\ & r(x) \leq r(Px)
\end{aligned}
$$ $\boxed{6}$

Insgesamt: aus 6) folgt $\varrho \overset{3)}{=} \underbrace{\sup\{r(x) \mid x \in K\}}_{\leq \varrho} \leq \sup\{r(y) \mid y \in \mathcal{G}\}$

$\Longrightarrow \qquad \sup\{r(y) \mid y \in \mathcal{G}\} = \varrho.$

Da $\mathcal{G}$ kompakt und r stetig auf $\mathcal{G}$ ist (5+4), folgt, dass es ein $z \in \mathcal{G}$ mit $r(z) = \varrho$.

Ut 5. gilt $z > 0$, d.h. z tut das für Lemma 1 Gewünschte

[L1]

<u>Lemma 2.</u> Sei $x \geq 0, x \neq 0$ mit $\varrho \cdot x \leq Ax$. Dann gilt

$$\varrho x = Ax \quad (\text{EV}!) \quad \text{und} \quad x > 0.$$

<u>Beweis.</u> <u>Annahme</u>: $\varrho x \neq Ax$.

$$\varrho x \leq Ax \iff \underbrace{Ax - \varrho x}_{\neq 0} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad P(Ax - \varrho x) > 0$$

$$\iff \quad PAx > \varrho Px$$

$$\iff \quad A(Px) > \varrho (Px)$$

Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$A(Px) \geq (\varrho + \delta) Px.$$

L1/1

$$\Longrightarrow \quad r(Px) \geq \varrho + \delta > \varrho \qquad \text{Wid. zu Def von } \varrho$$

$\Longrightarrow \quad \varrho x = Ax.$

Teil 2: ~~Bel~~ $x > 0$:

$$Ax = \varrho x$$
$$(A+I)x = (\varrho+1)x$$

$$0 < Px = (A+I)^{n-1} x = (\varrho+1)^{n-1} x$$

$$\Longrightarrow \quad x = \underbrace{\frac{1}{(1+\varrho)^{n-1}}}_{>0} \underbrace{Px}_{>0} > 0.$$

$\boxed{L2}$

Lemma 3. Sei λ ein EW von A und x ein EV zu λ. Dann gilt
$|\lambda| \leq \varrho$,
Falls $|\lambda| = \varrho$, folgt $|x| > 0$ (alle Beträge komponentenweise).

Beweis.
$$|\lambda| \cdot |x| = |\lambda x| = |Ax| \underset{\text{Dreiecksungl}}{\leq} A \cdot |x|$$

Da $|x| \geq 0$ und $|x| \neq 0$, folgt aus Lemma 1/1, dass

$|\lambda| \le r(|x|) \le \varrho \qquad \Longrightarrow |\lambda| \le \varrho.$

Falls $|\lambda| = \varrho$, so gilt

$\varrho |x| \le A|x|$, aus Lemma 2 folgt $|x| > 0$ $\boxed{L3}$

<u>Bemerkung.</u> $\varrho(A) = \varrho$, es gibt einen pos EV zu EW $\varrho = \varrho(A)$,

Lt Lemma 3: $\varrho(A) \le \varrho$.

Lt Lemma 1: $\exists\, y > 0 : \quad r(y) = \varrho \xRightarrow{\text{Lemma 1/1}} \varrho y \le Ay$

$\xRightarrow{\text{Lemma 2}} Ay = \varrho y \Longrightarrow \varrho$ EW, y EV zu $\varrho \Longrightarrow \varrho \le \varrho(A)$

$\Longrightarrow \varrho = \varrho(A)$ $\square$

1.7.2010

<u>Lemma 4</u>. $\varrho(A)$ hat geom. Vf 1 als EW von A.

<u>Beweis</u>. Seien x und y l.u. EV zum EW $\varrho(A)$ von A,
Laut Lemma 3 gilt $|x| > 0$, $|y| > 0$, also alle Einträge von x und $y \neq 0$.

Betrachte

$$z = y_1 x - x_1 y.$$

- Nach Konstruktion gilt $z_1 = y_1 \cdot x_1 - x_1 y_1 = 0$.
- Da $y_1 \neq 0$ und $x_1 \neq 0$ und x, y l.u., gilt $z \neq 0$.
- Da $z \neq 0$ und z lin. Komb. zweier EV zum EW $\varrho(A)$, ist auch z EV zum EW $\varrho(A)$. Laut Lemma 3 gilt $|z| > 0$, also $z_1 \neq 0$. Wid. $\square$

Lemma 5. $\varrho(A)$ hat algebr. Vf 1 als EW von A.

Beweis. indirekt. Wir nehmen an, dass $\varrho(A)$ algebr. Vf ≥ 2 hat, laut Lemma 4 gibt es einen Jordanblock zum EW $\varrho(A)$. Sei $x > 0$ EV zum EW $\varrho(A)$ und $z \in \mathbb{R}^n$ mit $(A - \varrho(A) I) z = x$.

Wende alles bisherige auf die Matrix A^t an.
(A^t ist irreduzibel, zugeh. Graph ist durch Umorientierung aller Kanten entstanden und daher stark zh.).
Somit gibt es EV $y > 0$ zum EW $\varrho(A)$ von A^t,
$$A^t y = \varrho(A) y$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - \varrho(A) I)^t y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^t (A - \varrho(A) I) = 0$$

(y ist pos. Links-EV zum EW $\varrho(A)$ von A),

Somit gilt

$$0 < y^t x = \big(y^t (A - \varrho(A) I)\big) z = 0 \cdot z = 0 \qquad \text{Wid.} \ \square$$

$\boxed{\text{Satz}}$

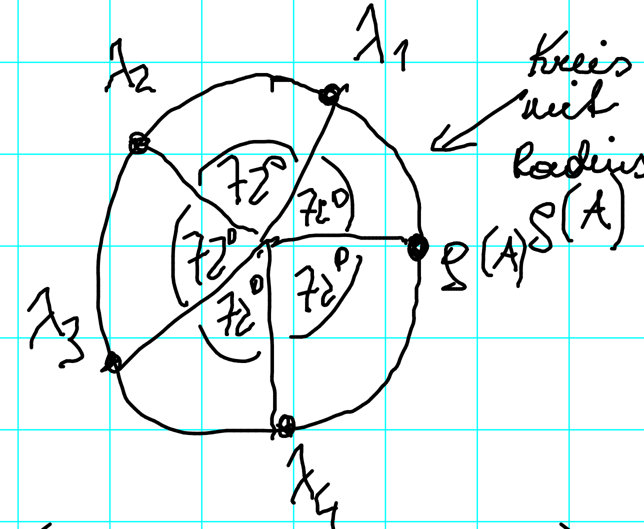
11.3 Rotationsinvarianz von Eigenwerten

Satz 11.2. (Perron-Frobenius II, Rotationsinvarianz) Sei $A \geq 0$ irreduzibel. Es gebe genau k Eigenwerte λ_j von A mit $|\lambda_j| = \varrho(A)$, $0 \leq j < k$. Dann gilt

$$\lambda_j = e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot j} \cdot \varrho(A) \qquad 0 \leq j < k.$$

Weiters ist die algebr. VF jedes dieser λ_j gleich 1.
Außerdem ist das Spektrum von A invariant unter Rotation

um $2\pi/k$.



Beweis. Sei λ ein EW von A mit $|\lambda| = \rho(A)$, $\lambda \neq \rho(A)$
und x ein EV zum EW λ von A.
Laut Lemma 3 gilt $|x| > 0$ und

$$A \cdot |x| = \rho(A) \cdot |x|. \qquad \text{lt. Lemma 2.}$$

$$A x = \lambda x$$

Setze

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{|x_1|}{x_1}, \frac{|x_2|}{x_2}, \dots, \frac{|x_n|}{x_n}\right),$$

somit gilt

$$|x| = D \cdot x \iff x = D^{-1}|x|$$

$$D \cdot \;\Big|\quad A D^{-1}|x| = \lambda D^{-1}|x|$$

$$\frac{\rho(A)}{\lambda} \;\Big|\quad D A D^{-1} \cdot |x| = \lambda |x|$$

$$\frac{\varrho(A)}{\lambda} DAD^{-1} |x| = \varrho(A)|x| = A \cdot |x|$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{A - \frac{\varrho(A)}{\lambda} DAD^{-1}}_{B}\Big)|x| = 0.$$

$$B_{rs} = a_{rs} - \underbrace{\underbrace{\frac{\varrho(A)}{\lambda}}_{\in \text{Einheitskreis}} \cdot \frac{|x_r|}{x_r} \frac{x_s}{|x_s|}}_{\in \text{Einheitskreis}} a_{rs} = a_{rs}\big(1 - \text{irgendwas am Einheitskreis}\big)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} b_{rs} = a_{rs} \operatorname{Re}\big(1 - \text{irgendwas am Einheitskreis}\big) \geq 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} B \geq 0$$

Wegen $\underbrace{(\operatorname{Re} B)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{|x|}_{>0} = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} B = 0.$

$$\operatorname{Re} b_{rs} = 0 = a_{rs} \operatorname{Re}\big(1 - \text{irgendwas am Einheitskreis}\big)$$

Somit $a_{rs} = 0$ oder $(\text{irgendwas am Einheitskreis}) = 1$

$\Rightarrow b_{rs} = 0$ in beiden Fällen.

(1) $\Rightarrow$ $$A = \frac{\rho(A)}{\lambda} \underbrace{DAD^{-1}}_{\text{ähnlich zu } A\text{, also dieselben EW wie } A},$$

$\underbrace{}$

hat genau EW von A mult. mit $\frac{\rho(A)}{\lambda}$.

Somit sind EW von A gleich den um Winkel von $\frac{\rho(A)}{\lambda}$ gedrehten EW von A.

Spektrum von A ist also invariant unter dieser Drehung.

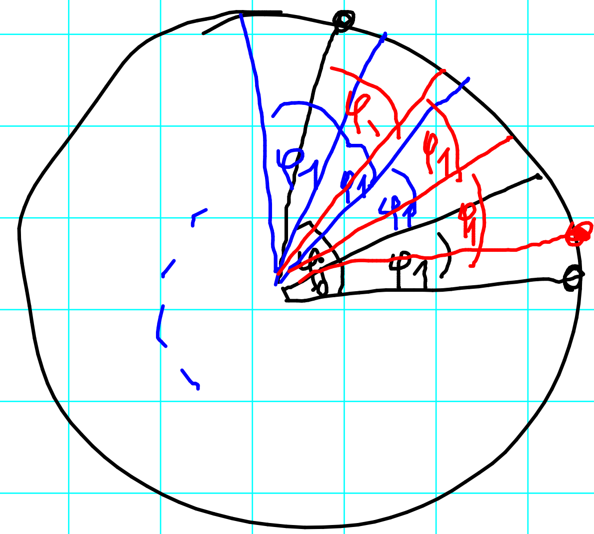
Die Vielfachheiten werden bei Rotation nicht verändert.

$\Rightarrow$ Alle EW von A mit $|\lambda_j| = \rho(A)$ haben algebr. Vf 1.

Seien jetzt
$$\lambda_j = \rho(A) \cdot e^{i\varphi_j} \qquad \text{für } 0 \le j < k.$$

oBdA $\quad 0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{k-1} < 2\pi$

weil $\rho(A)$ EW ist.



Sei $j \in \{2, \ldots, k-1\}$. Dann gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit

$$l\varphi_1 \leq \varphi_j < (l+1)\varphi_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \varphi_j - l\varphi_1 < \varphi_1$$

Ut (1) und den Bemerkungen danach ist

$$\lambda_j \cdot e^{-il\varphi_1} = \rho(A)\, e^{i(\varphi_j - l\varphi_1)}$$

ein EW von A. Ut Def von φ_1 folgt $\varphi_j - l\varphi_1 = 0$,

also $\varphi_j = l\varphi_1$.

Alle φ_j sind somit Vielfache von φ_1. Da alle Vf von φ_1 zu Eigenwerten führen, muss

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{k}$$

gelten. $\square$

11.4. Primitive Matrizen.

Definition. Sei $A \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ irreduzibel und A besitze nur einen EW λ mit $|\lambda| = \rho(A)$ (damit $\lambda = \rho(A)$). Dann heißt A primitiv.

Bemerkung Sei A primitiv, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \rho(A) & \\ & \tilde{J} \end{pmatrix}$ für Jordanmatrix $\tilde{J}$ mit $\rho(\tilde{J}) < \rho(A)$.

$$\Longrightarrow \quad A^m = T \begin{pmatrix} \rho(A)^m & \\ & \tilde{J}^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \rho(A)^m \; T \begin{pmatrix} 1 & \\ & O\left(\left|\frac{\sigma(\tilde{J})}{\sigma(A)}\right|^m m^k\right) \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$\underbrace{\qquad}_{\substack{\to 0\\ \text{exponentiell}}}$$

$$= \varrho(A)^m \left(T \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} T^{-1} + O\left(\left| \frac{\sigma(J)}{\sigma(A)} \right|^m m^k \right) \right)$$

Sei $T = \begin{pmatrix} x & ? \end{pmatrix}$ für EV x zum EW $\varrho(A)$ von A $x > 0$.

$T^{-1} = \begin{pmatrix} y^t \\ ? \end{pmatrix}$ wobei y^t LinksEV zum EW $\varrho(A)$ von A mit $y^t x = 1$ ist (Ü 74 + 75)

Weiters sei z^t der positive Links EV von A zum EW $\varrho(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $y^t = \alpha z^t$.

$$\Rightarrow \quad 1 = y^t x = \alpha \underbrace{z^t x}_{>0} \quad \Rightarrow \alpha > 0, \text{ also } y > 0$$

$$A^m = \varrho(A)^m \left(\begin{pmatrix} x & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^t \\ ? \end{pmatrix} + \text{Klein} \right) =$$

$$= \rho(A)^m \left(\begin{pmatrix} x & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^t \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Klein} \right) = \rho(A)^m \left(xy^t + \text{Klein} \right),$$

Man kennt also asymptotisches Verhalten von primitiven Matrizen (zumindest qualitativ) allein aus Perron-Frobenius, ohne weitere Rechnung

Satz 11.3. (Perron-Frobenius III, Charakterisierung primitiver Matrizen) Sei $A \geq 0$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) A ist primitiv
2) $\exists p_0 \in \mathbb{N} \; \forall p > p_0: \quad A^p > 0$
3) $\exists p \in \mathbb{N}: \quad A^p > 0$

Beweis. 2) $\Rightarrow$ 3) trivial

1) $\Rightarrow$ 2) (s. Bemerkung oben:

$$A^p = \underbrace{\rho(A)^p}_{>0} \Big(\underbrace{\underbrace{x}_{>0}\,\underbrace{y^t}_{>0} + O(\qquad)}_{>0 \text{ für hinr. große } p} \Big) > 0 \quad \text{für } p > p_0.$$

3) $\Longrightarrow$ 1) $\quad A^p > 0 \Longrightarrow$ es gibt Wanderung der Länge p zwischen je zwei Knoten im ger. Graphen G zu A.

$\Longrightarrow$ G stark zh $\Longrightarrow$ A irreduzibel.

<u>indirekt:</u>

Es gebe k Eigenwerte von A am Spektralradius für ein $k>1$.

Laut Satz 11.2 sind diese

$$\rho(A)\, e^{\frac{2\pi i}{k}\cdot j} \qquad 0 \le j < k.$$

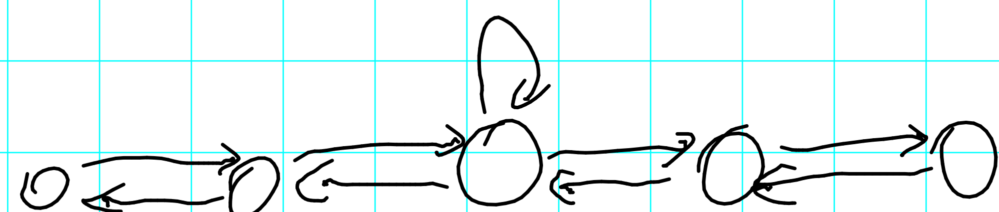
Betrachte $A^{pk} = \underbrace{A^p \cdot \ldots \cdot A^p}_{k} > 0. \Longrightarrow A^{pk}$ ist irred.

$$\rho(A)^{pk}\, \underbrace{e^{2\pi i p j}}_{=1} = \left(\rho(A)\, e^{\frac{2\pi i}{k} j}\right)^{pk} \quad \text{ist EW von } A^{pk} \text{ für } 0 \le j < k$$

$\Longrightarrow$ $\rho(A^{pk}) = \rho(A)^{pk}$ ist EW von $\rho(A)$ der geom. Vf $k \geq 2$.

Wid zu PF Teil I $\qquad \square$

zu Bsp.



Bsp. $A^4 > 0$.

von überall in ≤ 2 Schritte in Knoten 1

von Mitte nach überall in ≤ 2 Schritten

Warten in Schleife bei 1 nach Bedarf

$\Longrightarrow$ von überall nach überall in ≤ 4 Schritten.

$\Longrightarrow$ A primitiv.

Korollar (Perron). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A > 0$. Dann ist A primitiv.

Beweis. $p = 1$ oben. $\square$